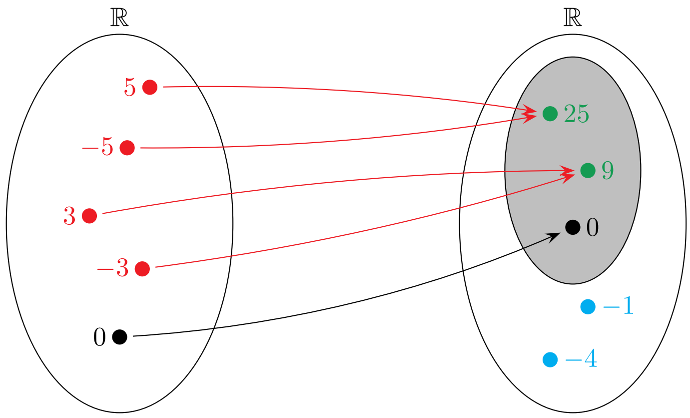
5 Noyau, Image & Inverse

Dans la mesure où une application linéaire opère une transformation, on peut vouloir parfois la défaire. Par exemple, on peut chercher à retrouver la configuration originale à partir de l'image finale.

Une telle démarche revient à tenter d'inverser une application linéaire.

Il n'est pas toujours possible d'inverser une application, en raison de deux problèmes qui peuvent survenir. En guise d'illustration, cherchons à inverser la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.



1) Comment définir l'inverse de 25 ? Est-ce 5 ou -5 ? On a la même difficulté pour définir l'inverse de 9 : est-ce que $f^{-1}(9) = 3$ ou $f^{-1}(9) = -3$?

   Visuellement, le problème est évident : deux flèches rouges aboutissent au même point vert, si bien que pour revenir de l'ensemble de droite à celui de gauche, on est bien emprunté pour savoir quel chemin rebrousser.

   Plus formellement, il arrive que $f(x) = f(y)$ avec $x \neq y$.
   Pour éviter ce problème, on aimerait au contraire que $f(x) = f(y)$ n'arrive que si $x = y$. C'est ce qu'on résume par cette exigence :

$$f(x) = f(y) \ \text{implique} \ x = y.$$

   Lorsque cette condition est remplie, on dit que la fonction f est **injective**.

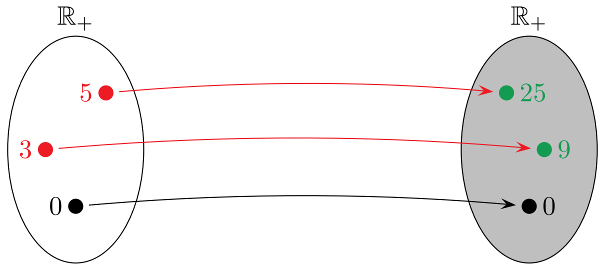
2) Comment définir l'inverse de -1 ? ou celui de -4 ?

   Visuellement, le problème est clair : aucune flèche rouge n'aboutit sur un point bleu. Alors qu'auparavant il y avait plusieurs chemins possibles à rebrousser, ici on n'en trouve aucun.

   Il faudrait donc que tout élément de l'ensemble d'arrivée soit l'image d'au moins un élément de l'ensemble de départ. En d'autres termes, il faudrait que l'image de l'application, représentée par l'ellipse grisée, recouvre la totalité de l'ensemble d'arrivée.

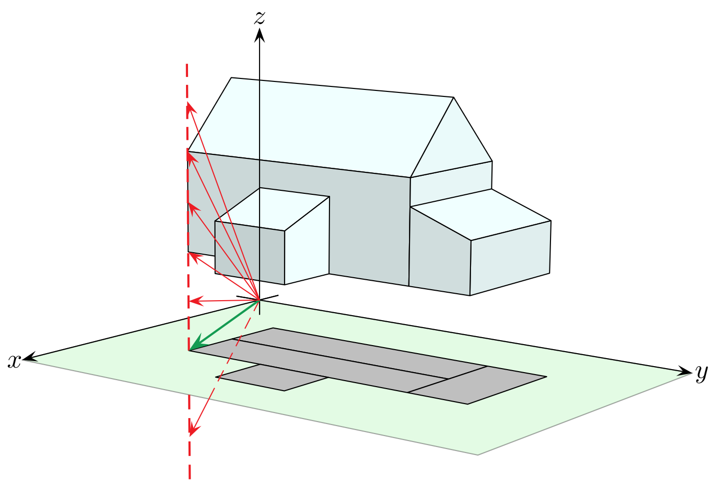
   Lorsque cette condition est satisfaite, on dit que la fonction est **surjective**.

Il n'est possible d'inverser une application que si elle est *à la fois injective et surjective*, c'est-à-dire **bijective**.



Avant de chercher à inverser des applications linéaires, il nous faut donc commencer par déterminer si elles sont injectives et surjectives.

Exemple 5.1 Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la projection orthogonale sur le plan Oxy.



1) Les vecteurs représentés en rouge ont tous la même image, tracée en vert. L'application linéaire n'est donc pas injective.

   Tous les vecteurs ayant la même image ont ceci de particulier que leur différence donne une direction verticale. On appellera noyau de cette application linéaire l'espace engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) Le plan, représenté en vert clair, engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est l'image de cette application linéaire. Vu que l'image ne correspond pas à la totalité de l'espace $\mathbb{R}^3$, l'application linéaire n'est pas surjective.

C'est pourquoi, il n'est pas possible d'inverser cette application linéaire.

C'est en connaissant le noyau d'une application linéaire que l'on saura si elle est injective et en déterminant son image que l'on saura si elle est surjective.

Noyau

Le **noyau** d'une application linéaire $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est l'ensemble de tous les vecteurs qui sont envoyés sur le vecteur nul :

$$\operatorname{Ker}(f) = \Big\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m : f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\Big\}$$

5.1 Considérons l'application linéaire définie par $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Les vecteurs suivants appartiennent-ils au noyau de f ?

1) $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

L'intérêt du noyau est qu'il donne un critère très simple pour savoir si une application linéaire est injective ou non.

Proposition 5.1 *Une application linéaire f est injective $\iff$ Ker$(f) = \{\boldsymbol{0}\}$.*

Preuve : $\Rightarrow$ Supposons que l'application linéaire f soit injective.

Soit $\boldsymbol{v}$ un vecteur quelconque du noyau. Par définition $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$. Comme une application linéaire laisse fixe l'origine, on a aussi $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$. On a donc $f(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{0})$. Si f est injective, alors $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ est le seul vecteur contenu dans le noyau, c'est-à-dire $\operatorname{Ker}(f) = \{\boldsymbol{0}\}$.

$\Leftarrow$ Supposons que $\operatorname{Ker}(f) = \{\boldsymbol{0}\}$.

Pour montrer que f est injective, on doit montrer que si $f(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{w})$, alors $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$.
Soient $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ deux vecteurs tels que $f(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{w})$. Il en résulte : $\boldsymbol{0} = f(\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w})$.
En d'autres termes $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \in \operatorname{Ker}(f) = \{\boldsymbol{0}\}$, c'est-à-dire $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ ou encore $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$.

Exemple 5.2 Déterminer le noyau de l'application linéaire définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Pour trouver le noyau de cette application linéaire, on doit résoudre :

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + 2\,y + 3\,z = 0 \\ 4\,x + 5\,y + 6\,z = 0 \\ 7\,x + 8\,y + 9\,z = 0 \end{cases}.$$

Résolvons en échelonnant et réduisant la matrice augmentée correspondante :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_2 \to L_2 - 4\,L_1 \\ L_3 \to L_3 - 7\,L_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_2 \to -1/3\,L_2 \\ L_3 \to -1/6\,L_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_3 \to L_3 - L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{L_1 \to L_1 - 2\,L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{d'où} \begin{cases} x = & \alpha \\ y = & -2\,\alpha \\ z = & \alpha \end{cases}$$

On a ainsi obtenu le noyau : $\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$.

Comme $\mathrm{Ker}(f) \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, l'application linéaire f n'est pas injective.

5.2 Déterminer le noyau des applications linéaires suivantes :

1) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$

2) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2\,x \\ x - y \\ y \end{pmatrix}$

3) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y - z \\ x - z \end{pmatrix}$

Préciser si l'application linéaire f est injective.

Image

L'**image** d'une application linéaire $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est l'ensemble de toutes les images de tous les vecteurs de l'espace de départ :

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m\}$$

Proposition 5.2 *L'image d'une famille génératrice engendre l'image de f.*

Preuve : Nous allons montrer que si $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_m}$ engendre l'espace de départ, alors $f(\boldsymbol{v_1}), f(\boldsymbol{v_2}), \ldots, f(\boldsymbol{v_m})$ engendre l'image de f.
Un vecteur quelconque de l'image s'écrit $f(\boldsymbol{v})$ pour un certain vecteur $\boldsymbol{v}$ de l'espace de départ. Il existe des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ tels que $\boldsymbol{v} = \alpha_1\,\boldsymbol{v_1} + \alpha_2\,\boldsymbol{v_2} + \ldots + \alpha_m\,\boldsymbol{v_m}$. Donc

$$f(\boldsymbol{v}) = f(\alpha_1\,\boldsymbol{v_1} + \alpha_2\,\boldsymbol{v_2} + \ldots + \alpha_m\,\boldsymbol{v_m}) = \alpha_1\,f(\boldsymbol{v_1}) + \alpha_2\,f(\boldsymbol{v_2}) + \ldots + \alpha_m\,f(\boldsymbol{v_m})$$

est bel et bien engendré par la famille $f(\boldsymbol{v_1}), f(\boldsymbol{v_2}), \ldots, f(\boldsymbol{v_m})$.

Remarque : comme on va le voir, l'image d'une base donne, au vu de la proposition 5.2, une famille génératrice, mais pas toujours libre.

Exemple 5.3 Poursuivons l'exemple 5.2 en déterminant l'image de cette même application linéaire, afin de savoir si elle est surjective.

Comme la base canonique $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ engendre l'espace de départ, l'image de f est l'espace engendré par les vecteurs $f(\boldsymbol{e_1}), f(\boldsymbol{e_2}), f(\boldsymbol{e_3})$.

Méthode 1

Reprenons la méthode de l'exemple 2.3 pour obtenir $\text{Vect}\Big(f(\boldsymbol{e_1}), f(\boldsymbol{e_2}), f(\boldsymbol{e_3})\Big)$.
Pour savoir si un vecteur $\boldsymbol{v}$ quelconque de l'espace d'arrivée est engendré par les vecteurs $f(\boldsymbol{e_1}), f(\boldsymbol{e_2}), f(\boldsymbol{e_3})$, on doit chercher à résoudre :

$$\alpha_1 f(\boldsymbol{e_1}) + \alpha_2 f(\boldsymbol{e_2}) + \alpha_3 f(\boldsymbol{e_3}) = \boldsymbol{v} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_1 \begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Résolvons en utilisant la matrice augmentée correspondant à ce système :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x \\ 4 & 5 & 6 & y \\ 7 & 8 & 9 & z \end{array}\right) \xRightarrow[\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - 7\,\mathrm{L}_1]{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - 4\,\mathrm{L}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & -3 & -6 & -4\,x + y \\ 0 & -6 & -12 & -7\,x + z \end{array}\right) \xRightarrow{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - 2\,\mathrm{L}_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & -3 & -6 & -4\,x + y \\ 0 & 0 & 0 & x - 2\,y + z \end{array}\right)$$

Ainsi l'espace engendré par les vecteurs $f(\boldsymbol{e_1}), f(\boldsymbol{e_2}), f(\boldsymbol{e_3})$ est non l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^3$ tout entier, mais seulement le plan d'équation $x - 2\,y + z = 0$.

C'est pourquoi l'application linéaire f n'est pas surjective.

Pour avoir une base de l'image, on résout l'équation $x - 2\,y + z = 0$, dont y et z sont des variables libres :

$$\begin{cases} x = 2\,\alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}. \qquad \text{On trouve } \operatorname{Im}(f) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Méthode 2

On sait déjà que les vecteurs $f(\boldsymbol{e_1}), f(\boldsymbol{e_2}), f(\boldsymbol{e_3})$ engendrent l'image, mais ils ne sont pas nécessairement linéairement indépendants.

Pour obtenir une base de l'image, il s'agit d'éliminer les vecteurs Redondants, c'est-à-dire ceux qui s'expriment comme une combinaison linéaire des autres vecteurs, afin de ne garder que des vecteurs linéairement indépendants.

Fort heureusement, aucun calcul supplémentaire n'est nécessaire. Il suffit en effet de considérer la matrice A de l'application linéaire et sa matrice R échelonnée réduite, déjà obtenue à l'exemple 5.2 :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad\qquad \mathrm{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{}_{f(\boldsymbol{e_1})} & \underbrace{}_{f(\boldsymbol{e_2})} & \underbrace{}_{f(\boldsymbol{e_3})} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \underbrace{}_{\boldsymbol{r_1}} & \underbrace{}_{\boldsymbol{r_2}} & \underbrace{}_{\boldsymbol{r_3}} \end{array}$$

Les vecteurs colonnes $\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}, \boldsymbol{r_3}$ de la matrice R montrent immédiatement que $\boldsymbol{r_3} = -\boldsymbol{r_1} + 2\,\boldsymbol{r_2}$, tandis que $\boldsymbol{r_1}$ et $\boldsymbol{r_2}$ sont linéairement indépendants.

Les vecteurs colonnes $f(\boldsymbol{e_1}), f(\boldsymbol{e_2}), f(\boldsymbol{e_3})$ de la matrice A obéissent exactement aux mêmes relations de dépendance linéaire :

$f(\boldsymbol{e_3}) = -f(\boldsymbol{e_1}) + 2\,f(\boldsymbol{e_2})$: on a bien $\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}$
tandis que les vecteurs $f(\boldsymbol{e_1})$ et $f(\boldsymbol{e_2})$ sont linéairement indépendants.

Par conséquent, les vecteurs $f(\boldsymbol{e_1})$ et $f(\boldsymbol{e_2})$ forment une base de l'image :

$$\mathrm{Im}(f) = \left\{\alpha\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix} : \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$$

Comme l'image de f est de dimension $2 < 3$, elle ne recouvre pas la totalité de l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^3$: l'application linéaire f n'est pas surjective.

Remarque : il ne faut pas s'étonner d'obtenir des bases différentes pour chacune des deux méthodes. Elles sont bien équivalentes :

$$\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

5.3 Déterminer les images des applications linéaires de l'exercice 5.2. Préciser si elles sont surjectives ou non.

5.4 Soit l'application linéaire f définie par $f(\boldsymbol{v}) = \mathrm{A}\,\boldsymbol{v}$ où $\mathrm{A} = \begin{pmatrix}-21 & -35 & -42\\ 9 & 15 & 18\\ 3 & 5 & 6\end{pmatrix}$.

1) Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.
2) Sans connaître $\mathrm{Ker}(f)$, montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
3) Sans calculer A^2, justifier que $\mathrm{A}^2 = 0$.

On va dorénavant privilégier la seconde méthode de l'exemple 5.3, car elle permet d'obtenir, avec un seul échelonnement, à la fois le noyau et l'image.

Elle permet aussi de facilement comprendre un résultat théorique important.

Exemple 5.4 Déterminer le noyau et l'image de l'application $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ définie par :

$$f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 1 & 6\\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1\\ -3 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 4 & 1 & 6 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}$$

Commençons par trouver le noyau de cette application linéaire :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 + 3L_1 \\ L_4 \to L_3 - 4L_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & -13 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 1 & 19 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & -21 & 0 \end{array}\right) \overset{L_2 \leftrightarrow -1/3\,L_4}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 1 & 19 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & -13 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_3 \to L_3 - 5L_2 \\ L_4 \to L_4 + 3L_2}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_3 \to -1/4\,L_3 \\ L_4 \to 1/2\,L_4}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \overset{L_4 \to L_4 - L_3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_1 \to L_1 - L_3 \\ L_2 \to L_2 - L_3}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{L_1 \to L_1 - L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ \underbrace{0}_{\boldsymbol{r_1}} & \underbrace{0}_{\boldsymbol{r_2}} & \underbrace{0}_{\boldsymbol{r_3}} & \underbrace{0}_{\boldsymbol{r_4}} & \underbrace{0}_{\boldsymbol{r_5}} & 0 \end{array}\right)$$

On a obtenu le noyau : $\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$

Pour avoir une base de l'image, il faut examiner les relations de dépendance linéaire entre les colonnes, ce qu'indique immédiatement la matrice échelonnée réduite : $\boldsymbol{r_3} = \boldsymbol{r_1} + 2\,\boldsymbol{r_2}$ et $\boldsymbol{r_5} = -\boldsymbol{r_1} + 3\,\boldsymbol{r_2} + 4\,\boldsymbol{r_4}$, tandis que $\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}, \boldsymbol{r_4}$ sont linéairement indépendants.
On observe les mêmes relations pour $f(\boldsymbol{e_1}), f(\boldsymbol{e_2}), f(\boldsymbol{e_3}), f(\boldsymbol{e_4}), f(\boldsymbol{e_5})$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}}_{f(\boldsymbol{e_3})} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{f(\boldsymbol{e_1})} + 2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{f(\boldsymbol{e_2})} \quad \text{et} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{f(\boldsymbol{e_5})} = - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{f(\boldsymbol{e_1})} + 3 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{f(\boldsymbol{e_2})} + 4 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{f(\boldsymbol{e_4})}$$

On a pour l'image : $\mathrm{Im}(f) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$

On peut donner encore plus rapidement une base de l'image, en extrayant de la matrice originale les mêmes colonnes que celles qui ont un pivot dans la matrice échelonnée réduite.

Cet exemple permet de saisir un résultat théorique important, simplement en comptabilisant le nombre de colonnes, de variables libres et de pivots :

(a) le nombre 5 de colonnes est la dimension de l'espace de départ $\mathbb{R}^5$;

(b) le nombre 2 de variables libres donne la dimension du noyau ;

(c) le nombre 3 de pivots donne la dimension de l'image.

Plus généralement, si $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une application linéaire définie par $f(\boldsymbol{v}) = \mathrm{A}\,\boldsymbol{v}$ avec une matrice A possédant r pivots, on aura :

(a) le nombre m de colonnes est la dimension de l'espace de départ $\mathbb{R}^m$;

(b) le nombre $m - r$ de variables libres donne la dimension du noyau ;

(c) le nombre r de pivots donne la dimension de l'image.

On utilise le terme de **rang** pour désigner à la fois :

— le **rang d'une matrice** A, qui est son nombre r de pivots ;

— le **rang d'une application linéaire** f, qui est la dimension r de $\mathrm{Im}(f)$.

On a ainsi donné les raisons qui justifient le **théorème du rang** :

Théorème 5.3 (Théorème du rang) *La somme des dimensions du noyau et de l'image d'une application linéaire vaut la dimension de l'espace de départ : si* $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *est une application linéaire,* $\dim\Big(\mathit{Ker}(f)\Big) + \dim\Big(\mathit{Im}(f)\Big) = m.$

5.5 Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires suivantes dont on donne la matrice relativement à la base canonique.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Préciser si les applications linéaires sont injectives, surjectives ou bijectives.

5.6 Soit f l'application linéaire définie par $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$

Pour quelle valeur de k l'application linéaire f est-elle injective ?

5.7 On donne, relativement à la base canonique, la matrice d'une application linéaire f. Déterminer le rang de f en fonction du paramètre k.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ -2 & 4\,k & 2 \\ k & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} k & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & k \end{pmatrix}$

Inverse

Rappelons qu'une application linéaire f n'est inversible que si elle est bijective. Le théorème du rang va permettre de préciser et simplifier cette exigence.

Soit $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire.
— Si f est injective, alors $m = \underbrace{\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)}_{=0} + \underbrace{\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)}_{\leqslant n} \leqslant n$.
— Si f est surjective, alors $n = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = m - \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) \leqslant m$.

Cela signifie que lorsqu'une application linéaire f est bijective, les dimensions de l'espace de départ et d'arrivée doivent être égales : $m = n$.

La matrice associée à f sera par conséquent une matrice carrée.

Dans les exercices précédents, on a observé, qu'une application linéaire peut être injective sans être surjective, ou inversement qu'elle peut être surjective sans être injective. De telles situations ne peuvent se produire que lorsque les dimensions des espaces de départ et d'arrivée sont différentes.

La donne change considérablement sitôt que ces dimensions sont égales.

Proposition 5.4 *Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire.*
1) Si f est injective, alors f est aussi surjective.
2) Si f est surjective, alors f est aussi injective.

5.8 Démontrer la proposition 5.4 à l'aide du théorème du rang.

Il nous reste à présent à voir comment déterminer, s'il existe, l'inverse d'une application linéaire f. Si A est la matrice associée à f relativement à la base canonique, on va chercher une matrice A^{-1} telle que $\mathrm{A}\,\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{I}$.

Exemple 5.5 Soit $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x + 5\,y \\ -3\,x - 7\,y \end{pmatrix}$.

Soit $\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}}_{f^{-1}(\boldsymbol{e_1})} & \underbrace{\begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix}}_{f^{-1}(\boldsymbol{e_2})} \end{pmatrix}$ la matrice associée à l'application inverse f^{-1}.

Puisque $f\big(f^{-1}(\boldsymbol{e_1})\big) = \boldsymbol{e_1}$, on doit avoir :

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2\,x_1 + 5\,y_1 = 1 \\ -3\,x_1 - 7\,y_1 = 0 \end{cases}$$

Résolvons ce système en échelonnant et réduisant sa matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 1 \\ -3 & -7 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_2 \to 2\,\mathrm{L}_2 + 3\,\mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 - 5\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{L}_1 \to 1/2\,\mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \text{si bien que } f^{-1}(\boldsymbol{e_1}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

De façon similaire, $f\Big(f^{-1}(\boldsymbol{e_2})\Big) = \boldsymbol{e_2}$ donne :

$$f\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 2\,x_2 + 5\,y_2 = 0 \\ -3\,x_2 - 7\,y_2 = 1 \end{cases}$$

On résout ce système en échelonnant et réduisant sa matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 0 \\ -3 & -7 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_2 \to 2\,\mathrm{L}_2 + 3\,\mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 - 5\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{L}_1 \to 1/2\,\mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \text{si bien que } f^{-1}(\boldsymbol{e_2}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Pour trouver $f^{-1}(\boldsymbol{e_1})$, puis $f^{-1}(\boldsymbol{e_2})$, on a effectué des calculs très semblables. Plutôt que de traiter deux systèmes l'un après l'autre, il est plus efficace de les résoudre tous deux à la fois, grâce à une matrice « super » augmentée :

on va réunir $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 1 \\ -3 & -7 & 0 \end{array}\right)$ et $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 0 \\ -3 & -7 & 1 \end{array}\right)$ en $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ -3 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

Montrons qu'en échelonnant et réduisant une seule fois, on obtient directement les deux résultats :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ -3 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_2 \to 2\,\mathrm{L}_2 + 3\,\mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 - 5\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -14 & -10 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{L}_1 \to 1/2\,\mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

En conclusion $\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $f^{-1}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Exemple 5.6 Déterminer, s'il existe, l'inverse de $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ 5 & -15 & 3 \end{pmatrix}$.

Posons $\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \underbrace{z_1}_{f^{-1}(\boldsymbol{e_1})} & \underbrace{z_2}_{f^{-1}(\boldsymbol{e_2})} & \underbrace{z_3}_{f^{-1}(\boldsymbol{e_3})} \end{pmatrix}$ et $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ 5 & -15 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

1) $f\Big(f^{-1}(\boldsymbol{e_1})\Big) = \boldsymbol{e_1} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ 5 & -15 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) $f\Big(f^{-1}(\boldsymbol{e_2})\Big) = \boldsymbol{e_2} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ 5 & -15 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3) $f\Big(f^{-1}(\boldsymbol{e_3})\Big) = \boldsymbol{e_3} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ 5 & -15 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Résolvons simultanément ces trois systèmes d'équations, en échelonnant et réduisant la matrice « super » augmentée correspondante :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -15 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{A}\qquad\qquad \mathrm{I}}{} \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - 5\,\mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -17 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_3 \to 3\,\mathrm{L}_3 + 5\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -10 & 5 & 3 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 + 4\,\mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + 10\,\mathrm{L}_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -39 & 20 & 12 \\ 0 & 3 & 0 & -99 & 51 & 30 \\ 0 & 0 & -1 & -10 & 5 & 3 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to 1/3\,\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \to -\mathrm{L}_3}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -39 & 20 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & -33 & 17 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -5 & -3 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 + 2\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -105 & 54 & 32 \\ 0 & 1 & 0 & -33 & 17 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -5 & -3 \end{array}\right) \underset{\mathrm{I}\qquad\qquad \mathrm{A}^{-1}}{}$$

En conclusion, on a obtenu $\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -105 & 54 & 32 \\ -33 & 17 & 10 \\ 10 & -5 & -3 \end{pmatrix}$.

En résumé, chercher l'inverse d'une matrice revient à échelonner et réduire la matrice « super » augmentée $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{I} \end{array}\right)$ pour tenter d'obtenir $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I} & \mathrm{A}^{-1} \end{array}\right)$.

Exemple 5.7 Appliquons cette méthode à la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + 2\,\mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Obtenir une ligne nulle dans la partie gauche signifie que la matrice A ne possède pas assez de pivots pour être inversible. En d'autres termes, l'application linéaire associée $f(\boldsymbol{v}) = \mathrm{A}\,\boldsymbol{v}$ n'est pas bijective, car elle est de rang < 2.

On comprend mieux le constat de l'exercice 4.8.

5.9 Déterminer, s'il existe, l'inverse des matrices suivantes :

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 & 1 \\ -9 & 2 & -5 & 6 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 & -6 \\ -5 & -10 & 9 & -15 \\ -6 & -12 & 27 & -18 \end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 & -6 \\ -5 & -10 & 9 & -15 \\ -6 & -12 & 12 & -19 \end{pmatrix}$

Théorème 5.5 (Théorème fondamental) *Soient* A *une matrice carrée de type* $n \times n$ *et* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *l'application linéaire définie par* $f(\boldsymbol{v}) = \mathrm{A}\,\boldsymbol{v}$. *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(a) *La matrice* A *possède* n *pivots.*

(b) *L'équation* $\mathrm{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *possède une solution, mais seulement une seule.*

(c) *L'équation* $\mathrm{A}\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ *possède la solution* $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$*, mais aucune autre.*

(d) *Les vecteurs formés des colonnes de* A *engendrent* $\mathbb{R}^n$.

(e) *Les vecteurs formés des colonnes de* A *sont linéairement indépendants.*

(f) *Les vecteurs formés des colonnes de* A *constituent une base de* $\mathbb{R}^n$.

(g) $\det(\mathrm{A}) \neq 0$.

(h) $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$.

(i) *L'application linéaire* f *est injective.*

(j) $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^n$.

(k) *L'application linéaire* f *est surjective.*

(l) *La matrice* A *est de rang* n.

(m) *L'application linéaire* f *est bijective.*

(n) *La matrice* A *est inversible.*

Ce théorème résume l'ensemble des résultats obtenus aux chapitres 1, 2, 4 et 5. Du moment que l'une quelconque de ces affirmations est vérifiée, alors chacune des autres affirmations est aussi vérifiée. Inversement, si l'une de ces affirmations est fausse, alors toutes les autres affirmations sont fausses.

Méditez [1] soigneusement ce théorème : c'est le cœur de l'algèbre linéaire.

5.10 Avec le minimum de calcul, dire si les matrices suivantes sont inversibles :

1) $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -3 & -7 & 0 \\ 8 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} -7 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

1. Le terme « méditer » provient du latin *meditari*, qui signifie « s'exercer », que l'on traduit en grec par γυμνάζειν, d'où provient, bien sûr, le terme « gymnase ».

Réponses

5.1 1) non 2) oui

5.2 1) $\operatorname{Ker}(f) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$ f n'est pas injective

2) $\operatorname{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ f est injective

3) $\operatorname{Ker}(f) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ f n'est pas injective

5.3 1) $\operatorname{Im}(f) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$: droite d'équations $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ f non surjective

2) $\operatorname{Im}(f) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$:
plan d'équation $x - 2\,y - 2\,z = 0$ f non surjective

3) $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ f surjective

5.4 1) $\operatorname{Im}(f)$ admet pour base le vecteur $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) Il suffit de vérifier que $f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$.

3) $f(\boldsymbol{e_1}), f(\boldsymbol{e_2}), f(\boldsymbol{e_3}) \in \operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(f)$
$f\big(f(\boldsymbol{e_1})\big) = f\big(f(\boldsymbol{e_2})\big) = f\big(f(\boldsymbol{e_3})\big) = \mathbf{0}$.

5.5 1) $\operatorname{Ker}(f) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^2$
f est non injective, surjective, non bijective.

2) $\operatorname{Ker}(f) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ $\operatorname{Im}(f) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$
f est non injective, non surjective, non bijective.

3) $\operatorname{Ker}(f) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^3$
f est non injective, surjective, non bijective.

4) $\operatorname{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\qquad \operatorname{Im}(f) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$

f est injective, non surjective, non bijective.

5.6 $\quad k \neq 1$ et $k \neq -2$

5.7 $\quad$ 1) rang de $(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = -1 \\ 2 & \text{si } k = 2 \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}$ $\qquad$ 2) rang de $(f) = \begin{cases} 2 & \text{si } k = 1 \text{ ou } k = \frac{5}{3} \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}$

5.8 $\quad$ 1) $\dim\big(\operatorname{Im}(f)\big) = n - \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big) = n - 0 = n$ implique $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^n$.

2) $\dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big) = n - \dim\big(\operatorname{Im}(f)\big) = n - n = 0$ implique $\operatorname{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$.

5.9 $\quad$ 1) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ $\qquad$ 2) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{28} & -\frac{5}{28} \\ -\frac{3}{14} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix}$ $\qquad$ 3) non inversible

4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ 5) $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ $\qquad$ 6) $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{15} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{15} \end{pmatrix}$

7) non inversible $\qquad$ 8) non inversible $\qquad$ 9) $\begin{pmatrix} \frac{131}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{8}{5} & 3 \\ -\frac{43}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{9}{5} & 0 \\ -5 & 0 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

5.10 $\quad$ 1) oui $\qquad$ 2) non $\qquad$ 3) oui

4) non $\qquad$ 5) non $\qquad$ 6) oui