

5.2

- 1) Pour trouver le noyau de cette application linéaire, on doit résoudre :

$$f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Manifestement les variables y et z sont libres, d'où la solution évidente :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ker}(f) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Comme $\text{Ker}(f) \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, l'application linéaire f n'est pas injective.

- 2) Pour trouver le noyau de cette application linéaire, on doit résoudre :

$$f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2x \\ x - y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ x - y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{L}_2 \leftrightarrow \text{L}_3]{\text{L}_1 \rightarrow 1/2 \text{L}_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{L}_3 \rightarrow \text{L}_3 - \text{L}_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\text{L}_3 \rightarrow \text{L}_3 + \text{L}_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$: l'application linéaire f est donc injective.

- 3) Pour trouver le noyau de cette application linéaire, on doit résoudre :

$$f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} y - z \\ x - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y - z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{L}_1 \leftrightarrow \text{L}_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Les variables x et y sont pivots, tandis que la variable z est libre :

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{donne} \quad \text{Ker}(f) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Puisque $\text{Ker}(f) \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, l'application linéaire f n'est pas injective.