5.3 1) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(a) **Méthode 1**

$$\alpha_1\, f(\boldsymbol{e_1}) + \alpha_2\, f(\boldsymbol{e_2}) + \alpha_3\, f(\boldsymbol{e_3}) = \boldsymbol{v} \iff \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 1 & 0 & 0 & z \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & y \end{array}\right)$$

L'espace engendré par les vecteurs $f(\boldsymbol{e_1}), f(\boldsymbol{e_2}), f(\boldsymbol{e_3})$ est non l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^3$ tout entier, mais seulement la droite d'équations $\begin{cases} x & = 0 \\ & y = 0 \end{cases}$.
C'est pourquoi l'application linéaire f n'est pas surjective.

Pour avoir une base de l'image, on résout le système d'équations $\begin{cases} x & = 0 \\ & y = 0 \end{cases}$
dont z est une variable libre : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

En résumé : $\mathrm{Im}(f) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$: droite d'équations $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

(b) **Méthode 2**

On doit éliminer les vecteurs linéairement dépendants parmi

$$f(\boldsymbol{e_1}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f(\boldsymbol{e_2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f(\boldsymbol{e_3}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

À l'évidence, les vecteurs nuls $f(\boldsymbol{e_2}) = 0 \cdot f(\boldsymbol{e_1})$ et $f(\boldsymbol{e_3}) = 0 \cdot f(\boldsymbol{e_1})$ sont redondants et peuvent être éliminés.
Par conséquent, le vecteur $f(\boldsymbol{e_1})$ forme une base de l'image :

$$\mathrm{Im}(f) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Comme l'image de f est de dimension $1 < 3$, elle ne recouvre pas la totalité de l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^3$: l'application linéaire f n'est pas surjective.

2) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2\,x \\ x-y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(a) **Méthode 1**

$$\alpha_1\, f(\boldsymbol{e_1}) + \alpha_2\, f(\boldsymbol{e_2}) = \boldsymbol{v} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & x \\ 1 & -1 & y \\ 0 & 1 & z \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & y \\ 0 & 1 & z \\ 2 & 0 & x \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - 2\,\mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 2 & x-2\,y \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - 2\,\mathrm{L}_2}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y+z \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & x-2\,y-2\,z \end{array}\right)$$

L'espace engendré par les vecteurs $f(\boldsymbol{e_1}), f(\boldsymbol{e_2})$ est non l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^3$ tout entier, mais seulement le plan d'équation $x - 2\,y - 2\,z = 0$. C'est pourquoi l'application linéaire f n'est pas surjective.

Pour avoir une base de l'image, on résout le système d'équations $\left\{ x - 2\,y - 2\,z = 0 \right.$ dont y et z sont des variables libres :

$$\begin{cases} x = 2\,\alpha + 2\,\beta \\ y = \quad \alpha \\ z = \qquad\quad \beta \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

$$\mathrm{Im}(f) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} : \text{plan d'équation } x-2\,y-2\,z = 0$$

(b) **Méthode 2**

À l'exercice 5.2 2), on a vu que la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a pour matrice échelonnée réduite $\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: les vecteurs $f(\boldsymbol{e_1})$ et $f(\boldsymbol{e_2})$ sont linéairement indépendants et constituent une base de l'image de f :

$$\mathrm{Im}(f) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

3) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y-z \\ x-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(a) **Méthode 1**

$$\alpha_1 \, f(\boldsymbol{e_1}) + \alpha_2 \, f(\boldsymbol{e_2}) + \alpha_3 \, f(\boldsymbol{e_3}) = \boldsymbol{v} \iff \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & x \\ 1 & 0 & -1 & y \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_2 \leftrightarrow \mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & y \\ 0 & 1 & -1 & x \end{array}\right)$$

Ce système admet une infinité de solutions, car la variable α_3 est libre :

$$\begin{cases} \alpha_1 = y + \alpha \\ \alpha_2 = x + \alpha \\ \alpha_3 = \phantom{x+{}} \alpha \end{cases} : (y+\alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (x+\alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}$$

Les vecteurs $f(\boldsymbol{e_1}), f(\boldsymbol{e_2}), f(\boldsymbol{e_3})$ engendrent la totalité de l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^2$: l'application linéaire f est surjective et $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

(b) **Méthode 2**

À l'exercice 5.2 3), on a vu que la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ a pour matrice échelonnée réduite $\mathrm{R} = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}}_{\boldsymbol{r_1}} & \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}}_{\boldsymbol{r_2}} & \underbrace{\begin{matrix} -1 \\ -1 \end{matrix}}_{\boldsymbol{r_3}} \end{pmatrix}$.

Les vecteurs colonnes $\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}, \boldsymbol{r_3}$ de la matrice R montrent immédiatement que $\boldsymbol{r_3} = -\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2}$, tandis que $\boldsymbol{r_1}$ et $\boldsymbol{r_2}$ sont linéairement indépendants.

Les vecteurs colonnes $f(\boldsymbol{e_1}), f(\boldsymbol{e_2}), f(\boldsymbol{e_3})$ de la matrice A obéissent exactement aux mêmes relations de dépendance linéaire :
$f(\boldsymbol{e_3}) = -f(\boldsymbol{e_1}) - f(\boldsymbol{e_2})$: on a bien $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
tandis que les vecteurs $f(\boldsymbol{e_1})$ et $f(\boldsymbol{e_2})$ sont linéairement indépendants.

L'image de f admet donc pour base $f(\boldsymbol{e_1}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $f(\boldsymbol{e_2}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

L'image de f est ainsi de même dimension 2 que l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^2$. L'image est donc égale à l'espace d'arrivée tout entier : $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$, ce qui signifie que l'application linéaire f est surjective.