

$$5.4 \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -21 & -35 & -42 \\ 9 & 15 & 18 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21x - 35y - 42z \\ 9x + 15y + 18z \\ 3x + 5y + 6z \end{pmatrix}$$

1) Il est facile de donner une base de l'image de f en remarquant que :

$$f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} -21 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} -35 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} -42 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

C'est pourquoi $\text{Im}(f)$ admet pour base le vecteur $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$2) \quad f(\mathbf{v}) = f\left(\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -21 \cdot (-7) - 35 \cdot 3 - 42 \cdot 1 \\ 9 \cdot (-7) + 15 \cdot 3 + 18 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-7) + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Soit $\mathbf{w} \in \text{Im}(f)$ un vecteur quelconque de l'image de f .

On a $\mathbf{w} = \alpha \mathbf{v}$ pour un certain coefficient $\alpha \in \mathbb{R}$.

Donc $f(\mathbf{w}) = f(\alpha \mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v}) = \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Cela signifie que n'importe quel vecteur $\mathbf{w}$ de l'image de f appartient au noyau de f : $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.

3) $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), f(\mathbf{e}_3) \in \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$

$$f(f(\mathbf{e}_1)) = f(f(\mathbf{e}_2)) = f(f(\mathbf{e}_3)) = \mathbf{0}$$

La matrice A^2 de $f \circ f$ a ainsi des colonnes nulles : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.