**5.5** 1) Commençons par déterminer le noyau de cette application linéaire :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Les variables $x$ et $y$ sont pivots, alors que $z$ est variable libre :

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = -2\,\alpha \\ z = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R} : \operatorname{Ker}(f) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Comme $\operatorname{Ker}(f) \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, l'application linéaire $f$ n'est pas injective.

Puisque la matrice échelonnée réduite possède 2 pivots, la dimension de l'image, qui vaut 2, égale la dimension de l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^2$.
C'est pourquoi $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ et l'application linéaire $f$ est surjective.

Vu que l'application linéaire $f$ n'est pas injective, elle n'est pas bijective.

2) Commençons par déterminer le noyau de cette application linéaire :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to L_3 + L_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \to 2\,L_1 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to 1/2\,L_2]{L_1 \to 1/2\,L_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-7}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2}\,\alpha \\ y = -\frac{1}{2}\,\alpha \\ z = \alpha \end{cases} = \frac{1}{2}\,\alpha \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Ker}(f) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Puisque $\operatorname{Ker}(f) \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, l'application linéaire $f$ n'est pas injective.

La matrice échelonnée réduite donne les relations de dépendance linéaire entre $f(\boldsymbol{e_1})$, $f(\boldsymbol{e_2}$ et $f(\boldsymbol{e_3})$ :

$$f(\boldsymbol{e_3}) = -\tfrac{7}{2}\,f(\boldsymbol{e_1}) + \tfrac{1}{2}\,f(\boldsymbol{e_2}) : \text{on a bien } \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = -\frac{7}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im}(f) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Comme $\operatorname{Im}(f)$ est de dimension $2 < 3$, l'image de $f$ n'engendre pas la totalité de l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^3$ : l'application linéaire $f$ n'est pas surjective.

L'application linéaire $f$ ne saurait être bijective, puisqu'elle n'est ni injective ni surjective.

3) Commençons par déterminer le noyau de cette application linéaire :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{L}_3 \to -1/2\,\mathrm{L}_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_3]{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -\alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = 0 \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Comme $\mathrm{Ker}(f) \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, l'application linéaire $f$ n'est pas injective.

Puisque la matrice échelonnée réduite possède 3 pivots, la dimension de l'image, qui vaut 3, égale la dimension de l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^3$.
C'est pourquoi $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$ et l'application linéaire $f$ est surjective.

Vu que l'application linéaire $f$ n'est pas injective, elle n'est pas bijective.

4) Commençons par déterminer le noyau de cette application linéaire :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{L}_4 \to \mathrm{L}_4 - 2\,\mathrm{L}_1]{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{L}_3 \leftrightarrow \mathrm{L}_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{L}_4 \to \mathrm{L}_4 - 3\,\mathrm{L}_2]{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - 3\,\mathrm{L}_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{L}_4 \to -1/3\,\mathrm{L}_4]{\mathrm{L}_3 \to -1/4\,\mathrm{L}_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_4 \to \mathrm{L}_4 - \mathrm{L}_3}]{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \operatorname{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Par conséquent, l'application linéaire $f$ est injective.

La matrice échelonnée réduite révèle que les colonnes de la matrice de l'application linéaire sont linéairement indépendantes.

Donc $\operatorname{Im}(f) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$.

Vu que la dimension de l'image de $f$ vaut $3 < 4$, l'image de $f$ de recouvre pas la totalité de l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^4$ : l'application linéaire $f$ n'est pas surjective.

Comme l'application linéaire $f$ n'est pas surjective, elle ne saurait être bijective.