

5.6 L'application linéaire f est injective si

$$f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + kz \\ x + ky + z \\ kx + y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

admet uniquement la solution triviale $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

Échelonnons et réduisons la matrice correspondant à ce système d'équations :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & | & 0 \\ 1 & k & 1 & | & 0 \\ k & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{L}_3 \rightarrow \text{L}_3 - k\text{L}_1]{\text{L}_2 \rightarrow \text{L}_2 - \text{L}_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & | & 0 \\ 0 & k-1 & 1-k & | & 0 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{L}_3 \rightarrow \text{L}_3 + \text{L}_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & | & 0 \\ 0 & k-1 & 1-k & | & 0 \\ 0 & 0 & \underbrace{-k^2 - k + 2}_{-(k-1)(k+2)} & | & 0 \end{pmatrix}$$

Le système possède uniquement la solution triviale pour solution s'il y a trois pivots, c'est-à-dire si $k - 1 \neq 0$ et $-(k - 1)(k + 2) \neq 0$.

En définitive, l'application linéaire f est injective si $k \neq 1$ et $k \neq -2$.