5.7 On rappelle que le rang d'une application linéaire est donné par le nombre de pivots de sa matrice échelonnée.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ -2 & 4\,k & 2 \\ k & -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{}{\overset{\mathrm{L}_2 \to 1/2\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ -1 & 2\,k & 1 \\ k & -2 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - k\,\mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ 0 & 2\,k+2 & k+1 \\ 0 & -2\,k-2 & 1-k^2 \end{pmatrix}$

$\overset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ 0 & 2\,k+2 & k+1 \\ 0 & 0 & -k^2+k+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ 0 & 2\,(k+1) & k+1 \\ 0 & 0 & -(k+1)\,(k-2) \end{pmatrix}$

— Si $k = -1$, il n'y a qu'un seul pivot : le rang de f vaut 1.

— Si $k = 2$, il y a deux pivonts : le rang de f vaut 2.

— Si $k \neq -1$ et $k \neq 2$, il y a trois pivots : le rang de f vaut 3.

2) $\begin{pmatrix} k & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & k \end{pmatrix} \overset{\mathrm{L}_3 \leftrightarrow \mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} -2 & -1 & k \\ 3 & 3 & -2 \\ k & 2 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to 2\,\mathrm{L}_2 + 3\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \to 2\,\mathrm{L}_3 + k\,\mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} -2 & -1 & k \\ 0 & 3 & 3\,k-4 \\ 0 & 4-k & k^2-2 \end{pmatrix}$

$\overset{\mathrm{L}_3 \to 3\,\mathrm{L}_3 - (4-k)\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} -2 & -1 & k \\ 0 & 3 & 3\,k-4 \\ 0 & 0 & \underbrace{3\,(k^2-2)}_{3\,k^2-6} - \underbrace{(4-k)\,(3\,k-4)}_{-3\,k^2+16\,k-16} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2 & -1 & k \\ 0 & 3 & 3\,k-4 \\ 0 & 0 & 6\,k^2-16\,k+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & k \\ 0 & 3 & 3\,k-4 \\ 0 & 0 & 2\,(k-1)\,(3\,k-5) \end{pmatrix}$

— Si $k = 1$ ou $k = \frac{5}{3}$, il y a deux pivots : le rang de f vaut 2.

— Si $k \neq 1$ et $k \neq \frac{5}{3}$, il y a trois pivots : le rang de f vaut 3.