5.8 1) Supposons f injective.

Vu la proposition 5.1, on a $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$.

Le théorème du rang donne : $n = \underbrace{\dim\Big(\mathrm{Ker}(f)\Big)}_{0} + \dim\Big(\mathrm{Im}(f)\Big) = \dim\Big(\mathrm{Im}(f)\Big)$.

Puisque la dimension de l'image de f égale la dimension de l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^n$, on a $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^n$: l'application linéaire f est surjective.

2) Supposons f surjective.

L'hypothèse $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^n$ et l'application du théorème du rang donnent :

$n = \dim\Big(\mathrm{Ker}(f)\Big) + \underbrace{\dim\Big(\mathrm{Im}(f)\Big)}_{n}$ d'où suit $\dim\Big(\mathrm{Ker}(f)\Big) = 0$.

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$ et l'application linéaire f est injective d'après la proposition 5.1.