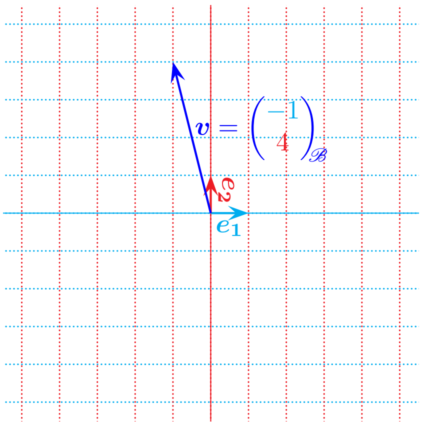
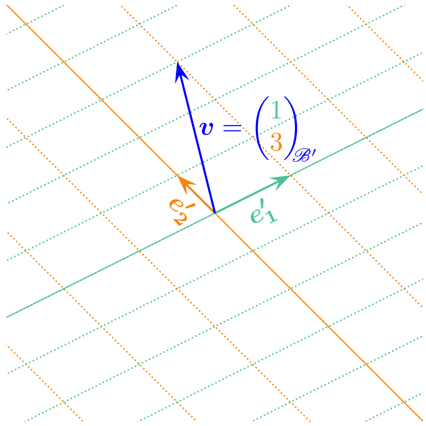
6 Changement de base & Diagonalisation

Jusqu'à présent, nous avons toujours considéré la matrice associée à une application linéaire *relativement à la base canonique*. Mais une application linéaire peut aussi être représentée par une matrice relativement à n'importe quelle autre base. La diagonalisation montrera l'intérêt d'un tel changement.

Changement de base

Exemple 6.1 Considérons deux bases $\mathscr{B} = (\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$ et $\mathscr{B}' = (\boldsymbol{e'_1}, \boldsymbol{e'_2})$ de $\mathbb{R}^2$. Représentons le même vecteur $\boldsymbol{v}$ dans chacune de ces bases.





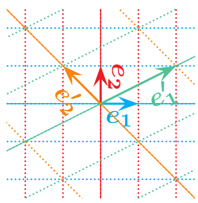
Pour déterminer les composantes du vecteur $\boldsymbol{v}$ dans chacune de ces bases, il faut l'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs de chacune d'elles :

$$\boldsymbol{v} = -1\,\boldsymbol{e_1} + 4\,\boldsymbol{e_2} \qquad\qquad \boldsymbol{v} = 1\,\boldsymbol{e'_1} + 3\,\boldsymbol{e'_2}$$

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} \qquad\qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'}$$

Il s'agit bien évidemment de comprendre comment passer d'une base à l'autre.

Exprimons les vecteurs $\boldsymbol{e'_1}$ et $\boldsymbol{e'_2}$ de la base $\mathscr{B}'$ comme des combinaisons linéaires des vecteurs $\boldsymbol{e_1}$ et $\boldsymbol{e_2}$ de la base $\mathscr{B}$:



$$e'_1 = 2\,\boldsymbol{e_1} + 1\,\boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} \quad \text{et} \quad e'_2 = -1\,\boldsymbol{e_1} + 1\,\boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$$

Nous pouvons désormais expliciter le passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'} = 1\,e'_1 + 3\,e'_2 = 1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} + 3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$$

La matrice $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, dont les colonnes sont formées des vecteurs de la base $\mathscr{B}'$ exprimés dans la base $\mathscr{B}$, s'appelle la **matrice de passage** de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$. C'est la matrice, relativement à la base $\mathscr{B}$, associée à l'application linéaire $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui envoie la base $\mathscr{B}$ sur la base $\mathscr{B}'$: $f(\boldsymbol{e_1}) = \boldsymbol{e'_1}$ et $f(\boldsymbol{e_2}) = \boldsymbol{e'_2}$.

En désignant par $\mathrm{V} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ et $\mathrm{V}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'}$ les composantes du vecteur $\boldsymbol{v}$, respectivement dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, on a la formule :

$$\mathrm{V} = \mathrm{P}\,\mathrm{V}'$$

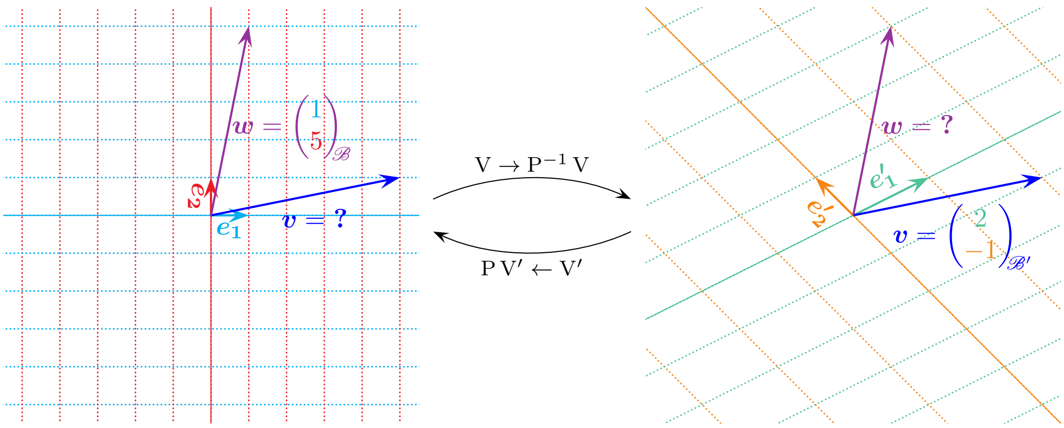
Vu le théorème 5.5 [(f) $\iff$ (n)], la matrice P est inversible, car les vecteurs formés par ses colonnes constituent une base. En multipliant à gauche l'égalité précédente par P^{-1}, on obtient la formule pour passer des composantes V d'un vecteur exprimées dans la base $\mathscr{B}$ aux composantes V′ exprimées dans la base $\mathscr{B}'$:

$$\mathrm{V}' = \mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{V}$$

Illustrons comment utiliser ces deux formules :

(a) Si le vecteur $\boldsymbol{v}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'}$ dans la base $\mathscr{B}'$, quelles sont ses composantes dans la base $\mathscr{B}$?

(b) Si le vecteur $\boldsymbol{w}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ dans la base $\mathscr{B}$, quelles sont ses composantes dans la base $\mathscr{B}'$?



(a) $\mathrm{V} = \mathrm{P}\,\mathrm{V}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$

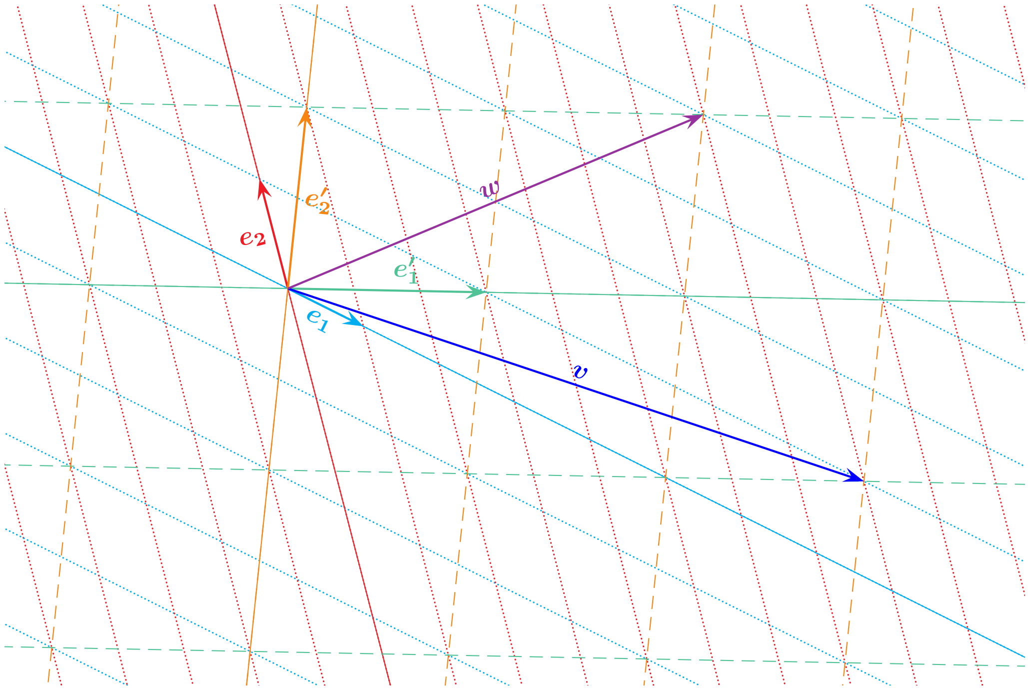
(b) Pour appliquer la formule $\mathrm{W}' = \mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{W}$, il faut calculer l'inverse de P :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - 2\,\mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{L}_1 \to 3\,\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to 1/3\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \to -1/3\,\mathrm{L}_2}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$\mathrm{W}' = \mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{W} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'}$$

6.1 On donne graphiquement deux bases $\mathscr{B} = (\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$ et $\mathscr{B}' = (\boldsymbol{e'_1}, \boldsymbol{e'_2})$, ainsi que deux vecteurs $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$.



1) Uniquement par voie graphique, déterminer :
   (a) les composantes V et W des vecteurs $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ dans la base $\mathscr{B}$;
   (b) les composantes V′ et W′ des vecteurs $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ dans la base $\mathscr{B}'$.

2) Procédons à présent à la vérification par calcul.
   (a) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.
   (b) Calculer les composantes V et W des vecteurs $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ dans la base $\mathscr{B}$ à partir de leurs composantes V′ et W′ dans la base $\mathscr{B}'$.
   (c) Réciproquement, calculer les composantes V′ et W′ des vecteurs $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ dans la base $\mathscr{B}'$ à partir de leurs composantes V et W dans la base $\mathscr{B}$.

6.2 Soit $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Si le vecteur $\boldsymbol{v}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ dans la base $\mathscr{B}$, quelles sont ses composantes dans la base $\mathscr{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$?

Exemple 6.2 Soit f la symétrie orthogonale d'axe $y = x$, c'est-à-dire l'application linéaire $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$.

Soient les bases $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{e'_1}, \boldsymbol{e'_2}) = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Pour déterminer la matrice A associée à l'application linéaire f relativement à la base $\mathscr{B}$, il faut exprimer $f(\boldsymbol{e_1})$ et $f(\boldsymbol{e_2})$ dans la base $\mathscr{B} = (\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$.

$$f(\boldsymbol{e_1}) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\, \boldsymbol{e_1} + 1\, \boldsymbol{e_2}$$

$$f(\boldsymbol{e_2}) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\, \boldsymbol{e_1} + 0\, \boldsymbol{e_2}$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \underbrace{1}_{f(e_1)} & \underbrace{0}_{f(e_2)} \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$$

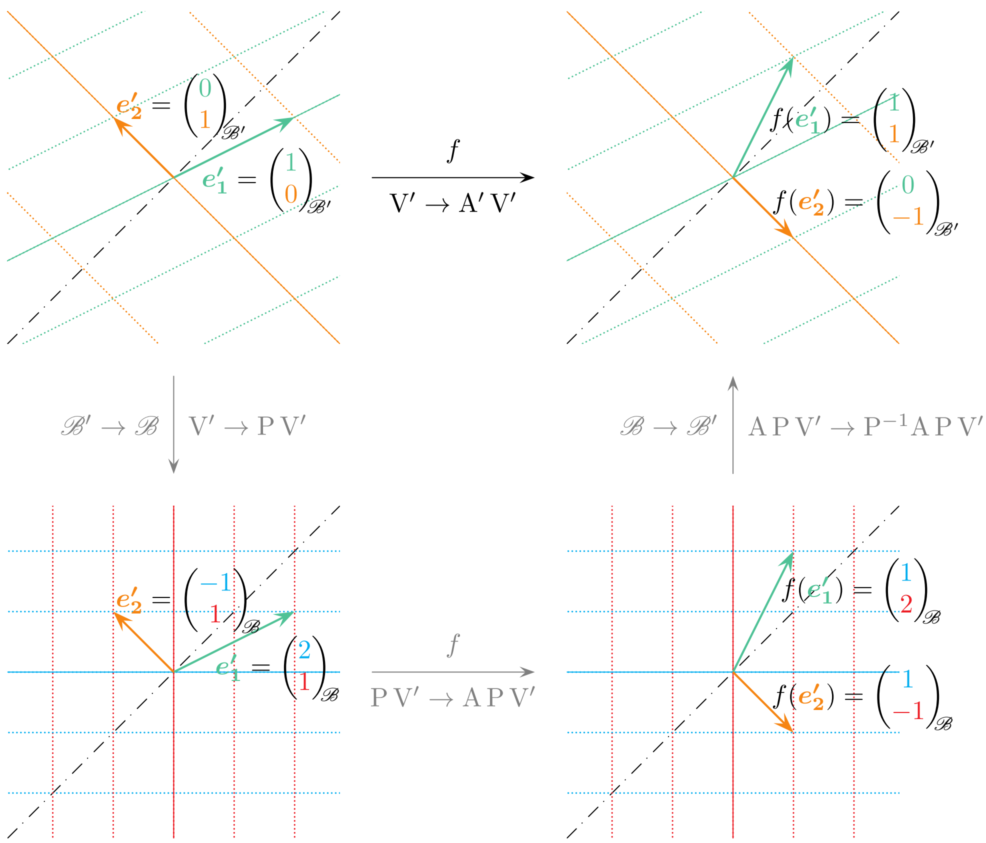
Pour déterminer la matrice A′ associée à l'application linéaire f relativement à la base $\mathscr{B}'$, il faut exprimer $f(\boldsymbol{e'_1})$ et $f(\boldsymbol{e'_2})$ dans la base $\mathscr{B}' = (\boldsymbol{e'_1}, \boldsymbol{e'_2})$.

$$f(\boldsymbol{e'_1}) = f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\, \boldsymbol{e'_1} + 1\, \boldsymbol{e'_2}$$

$$f(\boldsymbol{e'_2}) = f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\, \boldsymbol{e'_1} - 1\, \boldsymbol{e'_2}$$

$$\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \underbrace{1}_{f(e'_1)} & \underbrace{-1}_{f(e'_2)} \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'}$$

La matrice de passage $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, dont les colonnes sont formées des vecteurs de la base $\mathscr{B}'$ exprimés dans la base $\mathscr{B}$, sera à nouveau bien utile pour comprendre comment passer de la matrice A à la matrice A′.



Pour connaître les colonnes de la matrice A', on a besoin des composantes des images des vecteurs de la base $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}'$.

À défaut de les obtenir directement, on peut le faire en trois étapes :

1) Exprimer les composantes des vecteurs e_1' et e_2' dans la base $\mathscr{B}$.

$$e_1' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} \qquad e_2' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$$

2) Déterminer leurs images $f(e_1')$ et $f(e_2')$ dans la base $\mathscr{B}$ grâce à la matrice A associée à l'application linéaire f relativement à la base $\mathscr{B}$.

$$f(e_1') = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} \qquad f(e_2') = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$$

3) Exprimer les composantes du résultat relativement à la base $\mathscr{B}'$.

$$f(e_1') = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'} \qquad f(e_2') = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'}$$

Résumons ces trois étapes, de la dernière à la première :

$$f(e_1') = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'} \iff f(e_1') = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\,\mathrm{P}\, e_1'$$

$$f(e_2') = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'} \iff f(e_2') = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\,\mathrm{P}\, e_2'$$

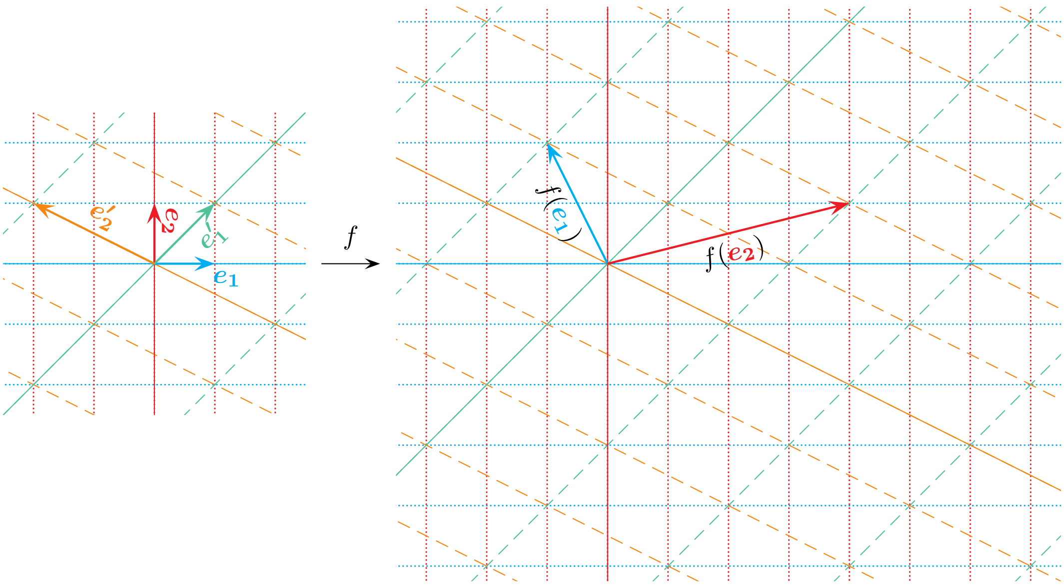
On a ainsi établi la formule du changement de base :

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\,\mathrm{P} = \mathrm{A}'$$

Un simple calcul permet en effet de vérifier cette formule :

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\,\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{A}'$$

6.3 On donne graphiquement deux bases $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ et $\mathscr{B}' = (e_1', e_2')$, ainsi que les images par une application linéaire f des vecteurs de la base $\mathscr{B}$.



1) Déterminer graphiquement les composantes des vecteurs $f(\boldsymbol{e_1})$ et $f(\boldsymbol{e_2})$ dans la base $\mathscr{B}$. En déduire la matrice A de l'application linéaire f relativement à la base $\mathscr{B}$.

2) (a) Comme $\boldsymbol{e'_1} = \boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2}$, on a que $f(\boldsymbol{e'_1}) = f(\boldsymbol{e_1}) + f(\boldsymbol{e_2})$.
Représenter dès lors le vecteur $f(\boldsymbol{e'_1})$.

   (b) Faire de même pour représenter graphiquement le vecteur $f(\boldsymbol{e'_2})$.

   (c) Déterminer graphiquement les composantes des vecteurs $f(\boldsymbol{e'_1})$ et $f(\boldsymbol{e'_2})$ dans la base $\mathscr{B}'$. En déduire la matrice A′ de l'application linéaire f relativement à la base $\mathscr{B}'$.

3) (a) Quelle est la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$?

   (b) Sans calcul, quel résultat va donner $\mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{A}\,\mathrm{P}$?

   (c) Effectuer le calcul et vérifier que l'on obtient bien le résultat escompté.

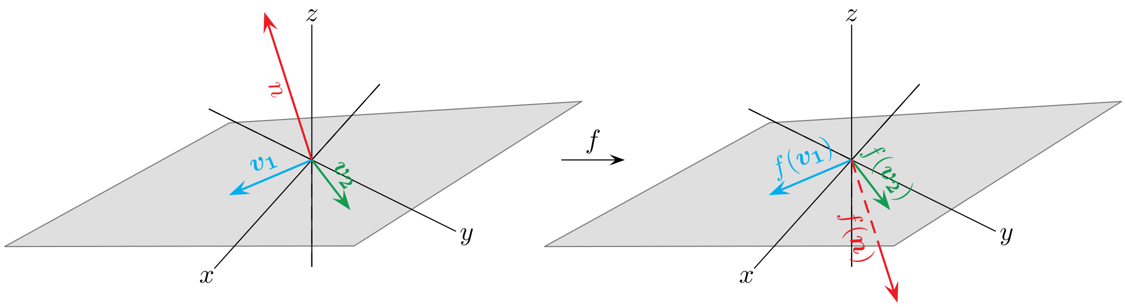
4) Cet exercice illustre l'intérêt du changement de base.

   (a) Parvenez-vous à caractériser géométriquement l'application linéaire f à partir de la matrice A ?

   (b) Même question à partir de la matrice A′.

6.4 Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice, relativement à la base canonique, est $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice de f relativement à la base $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$.

Exemple 6.3 Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la symétrie orthogonale relativement au plan d'équation $x + 2\,y - 3\,z = 0$. Dans la base canonique, quelle est la matrice A associée à f ?



Comme y et z sont des variables libres, l'équation $x + 2\,y - 3\,z = 0$ a pour solutions : $\begin{cases} x = -2\,\alpha + 3\,\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$.

Les images des vecteurs directeurs $\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et du vecteur normal $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ du plan $x + 2\,y - 3\,z = 0$ sont évidentes :

$$f(\boldsymbol{v_1}) = \boldsymbol{v_1} \qquad f(\boldsymbol{v_2}) = \boldsymbol{v_2} \qquad f(\boldsymbol{n}) = -\boldsymbol{n}$$

Ce problème est exactement celui que nous avons déjà traité à l'exemple 3.10. Nous allons ici le résoudre grâce à un changement de base.
Dans la base $\mathscr{B}' = (\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{n})$, la matrice associée à f est évidente :

$$\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Multiplier la formule $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\,\mathrm{P} = \mathrm{A}'$ par P à gauche et par P^{-1} à droite donne :

$$\mathrm{A} = \mathrm{P}\,\mathrm{A}'\,\mathrm{P}^{-1}$$

Le problème est déjà résolu. Procédons aux calculs, en débutant par P^{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_2 \leftrightarrow \mathrm{L}_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + 2\,\mathrm{L}_1 - 3\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 14 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to 14\,\mathrm{L}_1 - 2\,\mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_2 \to 14\,\mathrm{L}_2 + 3\,\mathrm{L}_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 14 & 0 & 0 & -2 & 10 & 6 \\ 0 & 14 & 0 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 14 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

Nous pouvons à présent déterminer la matrice A recherchée :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{14} & \frac{10}{14} & \frac{6}{14} \\ \frac{3}{14} & \frac{6}{14} & \frac{5}{14} \\ \frac{1}{14} & \frac{2}{14} & -\frac{3}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

Les exercices 6.5 et 6.6 sont exactement les mêmes que les exercices 3.11 et 3.12. On les résoudra cette fois à l'aide d'un changement de base.

6.5 Déterminer la matrice, relativement à la base canonique, associée à la projection orthogonale sur le plan d'équation $x + y + z = 0$.

6.6 Déterminer la matrice, relativement à la base canonique, associée à la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $2\,x - 3\,y + z = 0$.

Diagonalisation

Exemple 6.4 Si l'on donne l'application linéaire $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

comment peut-on savoir qu'il s'agit de la symétrie orthogonale par rapport au plan $x + 2\,y - 3\,z = 0$, donnée à l'exemple 6.3 ?

Les vecteurs $\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ont une particularité :

$$f(\boldsymbol{v_1}) = f\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\,\boldsymbol{v_1}$$

$$f(\boldsymbol{v_2}) = f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\,\boldsymbol{v_2}$$

$$f(\boldsymbol{n}) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = -1\,\boldsymbol{n}$$

Les vecteurs $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$ et $\boldsymbol{n}$ sont *non nuls* et vérifient la condition :

$$f(\boldsymbol{v}) = \mathrm{A}\,\boldsymbol{v} = \lambda\,\boldsymbol{v}$$

On dit alors que $\boldsymbol{v}$ est un **vecteur propre** et que λ est une **valeur propre**.

Il s'agit à présent de découvrir la méthode qui permet de trouver les valeurs propres et les vecteurs propres. D'après leur définition, on doit avoir :

$$\mathrm{A}\,\boldsymbol{v} = \lambda\,\boldsymbol{v} \iff \mathrm{A}\,\boldsymbol{v} = \lambda\,\mathrm{I}\,\boldsymbol{v} \iff \mathrm{A}\,\boldsymbol{v} - \lambda\,\mathrm{I}\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \iff (\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I})\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

Puisqu'un vecteur propre $\boldsymbol{v}$ est non nul, le théorème 5.5 [(c) $\iff$ (g)] implique :

$$\det(\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I}) = 0$$

La résolution de cette équation, appelée **équation caractéristique**, fournit les valeurs propres, qui permettront ensuite d'obtenir les vecteurs propres.

Appliquons ce procédé à notre exemple :

$$\det(\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} \frac{6}{7} - \lambda & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} - \lambda & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} - \lambda \end{vmatrix} \overset{\mathrm{C}_1 \to \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_3}{=} \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ 1 - \lambda & \frac{3}{7} - \lambda & \frac{6}{7} \\ 1 - \lambda & \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix}1 & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7}\\ 1 & \frac{3}{7}-\lambda & \frac{6}{7}\\ 1 & \frac{6}{7} & -\frac{2}{7}-\lambda\end{vmatrix} \overset{\substack{L_2\to L_2-L_1\\ L_3\to L_3-L_1}}{=} (1-\lambda)\begin{vmatrix}1 & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7}\\ 0 & \frac{5}{7}-\lambda & \frac{3}{7}\\ 0 & \frac{8}{7} & -\frac{5}{7}-\lambda\end{vmatrix} =$$

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix}\frac{5}{7}-\lambda & \frac{3}{7}\\ \frac{8}{7} & -\frac{5}{7}-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)\left(\left(\tfrac{5}{7}-\lambda\right)\left(-\tfrac{5}{7}-\lambda\right)-\tfrac{8}{7}\cdot\tfrac{3}{7}\right) =$$

$$(1-\lambda)\left(-\tfrac{25}{49}-\cancel{\tfrac{5}{7}\lambda}+\cancel{\tfrac{5}{7}\lambda}+\lambda^2-\tfrac{24}{49}\right) = -(\lambda-1)\underbrace{(\lambda^2-1)}_{(\lambda-1)\,(\lambda+1)} = -(\lambda-1)^2\,(\lambda+1)$$

L'équation caractéristique $-(\lambda-1)^2\,(\lambda+1)=0$ donne deux valeurs propres : $\lambda=1$ et $\lambda=-1$.

Pour obtenir les vecteurs propres, il s'agit, pour chaque valeur propre λ, de résoudre l'équation $(\mathrm{A}-\lambda\,\mathrm{I})\,\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$.

1) Commençons avec la valeur propre $\lambda=1$.

$$(\mathrm{A}-\lambda\,\mathrm{I})\,\boldsymbol{v}=\mathbf{0} \iff \begin{pmatrix}\frac{6}{7}-1 & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7}\\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7}-1 & \frac{6}{7}\\ \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{2}{7}-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Résolvons ce système en échelonnant et réduisant sa matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\frac{6}{7}-1 & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & 0\\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7}-1 & \frac{6}{7} & 0\\ \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{2}{7}-1 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{\substack{L_1\to 7\,L_1\\ L_2\to 7\,L_2\\ L_3\to 7\,L_3}} \left(\begin{array}{ccc|c}-1 & -2 & 3 & 0\\ -2 & -4 & 6 & 0\\ 3 & 6 & -9 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{\substack{L_1\to -L_1\\ L_2\to L_2-2\,L_1\\ L_3\to L_3+3\,L_1}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \qquad \text{Il en résulte : } \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} \text{ avec } \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

L'ensemble des solutions (c'est le plan d'équation $x+2\,y-3\,z=0$) s'appelle l'**espace propre** associé à la valeur propre $\lambda=1$ et se note E_1.

2) Faisons de même avec la valeur propre $\lambda=-1$.

$$(\mathrm{A}-\lambda\,\mathrm{I})\,\boldsymbol{v}=\mathbf{0} \iff \begin{pmatrix}\frac{6}{7}-(-1) & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7}\\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7}-(-1) & \frac{6}{7}\\ \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{2}{7}-(-1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Échelonnons et réduisons la matrice augmentée de ce système :

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\frac{6}{7}-(-1) & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & 0\\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7}-(-1) & \frac{6}{7} & 0\\ \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{2}{7}-(-1) & 0\end{array}\right) \xrightarrow{\substack{L_1\to 7\,L_1\\ L_2\to 7\,L_2\\ L_3\to 7\,L_3}} \left(\begin{array}{ccc|c}13 & -2 & 3 & 0\\ -2 & 10 & 6 & 0\\ 3 & 6 & 5 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1\leftrightarrow -1/2\,L_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -5 & -3 & 0\\ 13 & -2 & 3 & 0\\ 3 & 6 & 5 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{\substack{L_2\to L_2-13\,L_1\\ L_3\to L_3-3\,L_1}} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -5 & -3 & 0\\ 0 & 63 & 42 & 0\\ 0 & 21 & 14 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{\substack{L_2\to 1/21\,L_2\\ L_3\to 1/7\,L_3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2]{\mathrm{L}_1 \to 3\,\mathrm{L}_1 + 5\,\mathrm{L}_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{L}_3 \to 1/3\,\mathrm{L}_2]{\mathrm{L}_1 \to 1/3\,\mathrm{L}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On trouve : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\,\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Cette droite est l'espace propre E_{-1} associé à la valeur propre $\lambda = -1$. Elle donne la direction de la symétrie, qui se trouve, ici, être orthogonale au plan de symétrie d'équation $x + 2\,y - 3\,z = 0$.

Lorsqu'il y a suffisamment de vecteurs propres pour former une base, un changement dans cette base a pour effet de **diagonaliser** la matrice :

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Remarque : l'ordre des vecteurs propres dans la matrice de passage n'a aucune importance. Par contre, l'ordre des valeurs propres dans la matrice diagonale doit correspondre exactement à celui des vecteurs propres dans la matrice de passage.

6.7 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $f(\boldsymbol{v}) = \mathrm{A}\,\boldsymbol{v}$ où $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Quelle est l'équation caractéristique et quelles sont les valeurs propres de A ?
2) Déterminer les espaces propres de A correspondant aux valeurs propres.
3) Indiquer le changement de base qui permet d'obtenir une matrice diagonale. Comparer le résultat avec celui de l'exercice 6.3 3) (c).

6.8 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1) Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres.
2) Déterminer l'espace propre associé à chaque valeur propre.
3) Indiquer le changement de base qui permet d'obtenir une matrice diagonale.
4) Quelle est la transformation géométrique opérée par l'application linéaire f ?

6.9 Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{10}{19} & \frac{9}{19} & -\frac{3}{19} \\ \frac{9}{19} & \frac{10}{19} & \frac{3}{19} \\ -\frac{3}{19} & \frac{3}{19} & \frac{18}{19} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1) Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres.
2) Déterminer l'espace propre associé à chaque valeur propre.
3) Indiquer le changement de base qui permet d'obtenir une matrice diagonale.
4) Quelle est la transformation géométrique opérée par l'application linéaire f ?

Exemple 6.5 Toutes les matrices ne sont pas forcément diagonalisables. Pour l'illustrer, considérons la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Commençons par calculer son polynôme caractéristique :
$\det(\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\,(4-\lambda) - 1\cdot(-1) = \lambda^2 - 6\,\lambda + 9 = (\lambda-3)^2$
On obtient une seule valeur propre $\lambda = 3$. Recherchons l'espace propre E_3 :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2-3 & -1 & 0 \\ 1 & 4-3 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to -\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Attendu que le seul espace propre $\mathrm{E}_3 = \left\{\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\right\}$ est de dimension 1, il n'est pas possible de donner une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres : c'est pourquoi la matrice A n'est pas diagonalisable.

6.10 Pour chaque matrice, calculer son polynôme caractéristique, ses valeurs propres et déterminer les espaces propres associés ; préciser si elle est diagonalisable.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Puissance d'une matrice diagonalisable

Si $\boldsymbol{v}$ est un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre λ, alors $\boldsymbol{v}$ est aussi un vecteur propre de la matrice A^n associé à la valeur propre λ^n :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}\,\boldsymbol{v} = \lambda\,\boldsymbol{v}\\
&\mathrm{A}^2\,\boldsymbol{v} = \mathrm{A}\cdot\mathrm{A}\,\boldsymbol{v} = \mathrm{A}\cdot\lambda\,\boldsymbol{v} = \lambda\cdot\mathrm{A}\,\boldsymbol{v} = \lambda\cdot\lambda\,\boldsymbol{v} = \lambda^2\,\boldsymbol{v}\\
&\mathrm{A}^3\,\boldsymbol{v} = \mathrm{A}^2\cdot\mathrm{A}\,\boldsymbol{v} = \mathrm{A}^2\cdot\lambda\,\boldsymbol{v} = \lambda\cdot\mathrm{A}^2\,\boldsymbol{v} = \lambda\cdot\lambda^2\,\boldsymbol{v} = \lambda^3\,\boldsymbol{v}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots\\
&\mathrm{A}^n\,\boldsymbol{v} = \mathrm{A}^{n-1}\cdot\mathrm{A}\,\boldsymbol{v} = \mathrm{A}^{n-1}\cdot\lambda\,\boldsymbol{v} = \lambda\cdot\mathrm{A}^{n-1}\,\boldsymbol{v} = \lambda\cdot\lambda^{n-1}\,\boldsymbol{v} = \lambda^n\,\boldsymbol{v}
\end{aligned}$$

Exemple 6.6 Soit la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0\\ 5 & 3 & 2\\ -2 & 0 & 2\end{pmatrix}$. On aimerait calculer A^5.

Le calcul $\mathrm{A}^5 = \mathrm{A}\cdot\mathrm{A}\cdot\mathrm{A}\cdot\mathrm{A}\cdot\mathrm{A}$ risque d'être long et fastidieux.

On sait, grâce à l'exercice 6.10 5), que la matrice A est diagonalisable :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 3 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0\\ 5 & 3 & 2\\ -2 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 3 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

Puisque la matrice A^5 admet les mêmes vecteurs propres que la matrice A, mais avec des valeurs propres élevées à la puissance 5, on aura :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 3 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0\\ 5 & 3 & 2\\ -2 & 0 & 2\end{pmatrix}^5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 3 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^5 & 0 & 0\\ 0 & 2^5 & 0\\ 0 & 0 & 3^5\end{pmatrix}$$

Il ne reste plus qu'à calculer ce que vaut A^5 :

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}^5 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0\\ 5 & 3 & 2\\ -2 & 0 & 2\end{pmatrix}^5 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 3 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^5 & 0 & 0\\ 0 & 2^5 & 0\\ 0 & 0 & 3^5\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 3 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}\\
&= \begin{pmatrix} 1024 & 0 & 0\\ 3072 & -64 & 243\\ -1024 & 32 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1024 & 0 & 0\\ 2765 & 243 & 422\\ -992 & 0 & 32\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

6.11 On donne la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$. Calculer A^{10}.

6.12 Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 7 & 2\\ -4 & 1\end{pmatrix}$. Donner une formule pour A^n.

6.13 Calculer $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}^n$.

Réponses

6.1 1) (a) $\mathrm{V} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ $\mathrm{W} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ (b) $\mathrm{V}' = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'}$ $\mathrm{W}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'}$

2) (a) $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\mathrm{V} = \mathrm{P}\,\mathrm{V}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$

$\mathrm{W} = \mathrm{P}\,\mathrm{W}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$

(c) $\mathrm{V}' = \mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{V} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'}$

$\mathrm{W}' = \mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{W} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'}$

6.2 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'}$

6.3 1) $f(\boldsymbol{e_1}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ $f(\boldsymbol{e_2}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$

2) (c) $f(\boldsymbol{e'_1}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'}$ $f(\boldsymbol{e'_2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'}$ $\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'}$

3) (a) $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\,\mathrm{P} = \mathrm{A}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

4) (b) L'application linéaire f est la composition d'une homothétie de rapport 3 avec une symétrie d'axe $\boldsymbol{e'_1}$ et de direction $\boldsymbol{e'_2}$.

6.4 $\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -4 & -4 & 2 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

6.5 $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

6.6 $\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}$

6.7
1) équation caractéristique : $\lambda^2 - 9 = 0$ valeurs propres : $\lambda = 3$ et $\lambda = -3$
2) $\mathrm{E}_3 = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ $\mathrm{E}_{-3} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$
3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

6.8
1) polynôme caractéristique : $-(\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)$
valeurs propres : $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$
2) $\mathrm{E}_1 = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0 \right\}$
$\mathrm{E}_{-1} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$
3) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
4) symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x + y - z = 0$

6.9
1) polynôme caractéristique : $-\lambda (\lambda - 1)^2$
valeurs propres : $\lambda = 1$ et $\lambda = 0$
2) $\mathrm{E}_1 = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 3\,x - 3\,y + z = 0 \right\}$
$\mathrm{E}_0 = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$
3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{10}{19} & \frac{9}{19} & -\frac{3}{19} \\ \frac{9}{19} & \frac{10}{19} & \frac{3}{19} \\ -\frac{3}{19} & \frac{3}{19} & \frac{18}{19} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
4) projection orthogonale sur le plan d'équation $3\,x - 3\,y + z = 0$

6.10
1) polynôme caractéristique : $(\lambda - 1)^2$ valeur propre : $\lambda = 1$
$\mathrm{E}_1 = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ matrice non diagonalisable
2) polynôme caractéristique : $\lambda^2 - 4\,\lambda + 7$ aucune valeur propre
matrice non diagonalisable
3) polynôme caractéristique : $(4 - \lambda)^2$ valeur propre : $\lambda = 4$
$\mathrm{E}_4 = \mathbb{R}^2$ matrice diagonalisable : elle est déjà diagonale

4) polynôme caractéristique : $(\lambda-9)\,(\lambda+5)$ valeurs propres : $\lambda = 9$ et $\lambda = -5$

$\mathrm{E}_9 = \left\{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\right\}$ $\mathrm{E}_{-5} = \left\{\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\right\}$

matrice diagonalisable : $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$

5) polynôme caractéristique : $-(\lambda-4)\,(\lambda-3)\,(\lambda-2)$
valeurs propres : $\lambda = 4$, $\lambda = 3$ et $\lambda = 2$

$\mathrm{E}_4 = \left\{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\right\}$ $\mathrm{E}_3 = \left\{\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\right\}$ $\mathrm{E}_2 = \left\{\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\right\}$

matrice diagonalisable : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

6) polynôme caractéristique : $-(\lambda-3)^3$ valeur propre : $\lambda = 3$

$\mathrm{E}_3 = \left\{\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$ matrice non diagonalisable

7) polynôme caractéristique : $-(\lambda-1)\,(\lambda+2)^2$
valeurs propres : $\lambda = 1$ et $\lambda = -2$

$\mathrm{E}_1 = \left\{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\right\}$ $\mathrm{E}_{-2} = \left\{\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\right\}$

matrice non diagonalisable

8) polynôme caractéristique : $-(\lambda+1)^2\,(\lambda-3)$
valeurs propres : $\lambda = -1$ et $\lambda = 3$

$\mathrm{E}_{-1} = \left\{\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$ $\mathrm{E}_3 = \left\{\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\right\}$

matrice diagonalisable : $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

9) polynôme caractéristique : $(2-\lambda)^2\,(1-\lambda)\,(3-\lambda)$
valeurs propres $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ et $\lambda = 3$

$\mathrm{E}_1 = \left\{\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\right\}$ $\mathrm{E}_2 = \left\{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$

$\mathrm{E}_3 = \left\{\alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\right\}$ matrice diagonalisable :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

6.11 $\quad \mathrm{A}^{10} = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1^{10} & 0\\ 0 & 2^{10}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}3070 & -3069\\ 2046 & -2045\end{pmatrix}$

6.12 $\quad \mathrm{A}^{n} = \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}5^{n} & 0\\ 0 & 3^{n}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}2\cdot 5^n - 3^n & 5^n - 3^n\\ 2\cdot 3^n - 2\cdot 5^n & 2\cdot 3^n - 5^n\end{pmatrix}$

6.13 $\quad \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1^n & 0 & 0\\ 0 & 1^n & 0\\ 0 & 0 & 3^n\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^n+1 & 0 & 3^n-1\\ 3^n-1 & 2 & 3^n-1\\ 3^n-1 & 0 & 3^n+1\end{pmatrix}$