

6.10 1) Polynôme caractéristique

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \cdot (-\lambda) - (-1) \cdot 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

Valeur propre

$$\lambda = 1$$

Espace propre E_1

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2-1 & 1 & 0 \\ -1 & 0-1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x = -\alpha \\ y = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R} \quad E_1 = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Diagonalisation

Comme le seul espace propre est de dimension 1, il est impossible qu'une base de $\mathbb{R}^2$ soit formée de vecteurs propres : la matrice n'est par conséquent pas diagonalisable.

2) Polynôme caractéristique

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \cdot (1-\lambda) - (-1) \cdot 4 = \lambda^2 - 4\lambda + 7$$

Valeur propre

Résolvons l'équation caractéristique $\lambda^2 - 4\lambda + 7 = 0$:

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = -12$$

Il n'y a aucune solution, c'est-à-dire aucune valeur propre.

Espace propre

Aucun espace propre, puisqu'il n'y a aucune valeur propre.

Diagonalisation

Il est clairement impossible de donner une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres : la matrice n'est pas diagonalisable.

3) Polynôme caractéristique

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \cdot (4-\lambda) - 0 \cdot 0 = (4-\lambda)^2$$

Valeur propre

$$\lambda = 4$$

Espace propre E_4

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4-4 & 0 & 0 \\ 0 & 4-4 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_4 = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$$

Diagonalisation

Tous les calculs précédents étaient inutiles : la matrice est déjà diagonale.

4) Polynôme caractéristique

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 7 \\ 7 & 2-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + L_1} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 7 \\ 9-\lambda & 9-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \rightarrow C_1 - C_2} \\ = (9-\lambda) \begin{vmatrix} -5-\lambda & 7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (9-\lambda)(-5-\lambda)$$

Valeurs propres

$\lambda = 9$ et $\lambda = -5$

Espace propre E_9

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2-\textcolor{blue}{9} & 7 & 0 \\ 7 & 2-\textcolor{blue}{9} & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -7 & 7 & 0 \\ 7 & -7 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[L_2 \rightarrow 1/7 L_2]{L_1 \rightarrow -1/7 L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R} \\ E_9 = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Espace propre E_{-5}

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2-\textcolor{red}{(-5)} & 7 & 0 \\ 7 & 2-\textcolor{red}{(-5)} & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 7 & 7 & 0 \\ 7 & 7 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[L_2 \rightarrow 1/7 L_2]{L_1 \rightarrow 1/7 L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x = -\alpha \\ y = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R} \\ E_{-5} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Diagonalisation

$$\begin{pmatrix} \textcolor{blue}{1} & \textcolor{red}{-1} \\ \textcolor{blue}{1} & \textcolor{red}{1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \textcolor{blue}{1} & \textcolor{red}{-1} \\ \textcolor{blue}{1} & \textcolor{red}{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \textcolor{blue}{9} & 0 \\ 0 & \textcolor{red}{-5} \end{pmatrix}$$

5) Polynôme caractéristique

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 5 & 3-\lambda & 2 \\ -2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)$$

Valeurs propres

$\lambda = 4$, $\lambda = 3$ et $\lambda = 2$

Espace propre E_4

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 - 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 - 4 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 - 4 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \xRightarrow{L_1 \leftrightarrow -1/2 L_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xRightarrow{L_2 \rightarrow -L_2 + 5L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -\alpha \\ y = -3\alpha \\ z = \alpha \end{array} \right. = -\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R} \quad E_4 = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Espace propre E_3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 - 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 - 3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 - 3 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \xRightarrow{\begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \rightarrow -L_3 - 2L_1 \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xRightarrow{L_3 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \xRightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = \alpha \\ z = 0 \end{array} \right. = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R} \quad E_3 = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Espace propre E_2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 - 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 - 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 - 2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xRightarrow{\begin{array}{l} L_1 \rightarrow 1/2 L_1 \\ L_3 \rightarrow -1/2 L_3 \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xRightarrow{\begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = -2\alpha \\ z = \alpha \end{array} \right. = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R} \quad E_2 = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Diagonalisation

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6) Polynôme caractéristique

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 0 & 1 \\ 2 & 3 - \lambda & 2 \\ -1 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda) \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \xRightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + L_1} =$$

$$(3 - \lambda) \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 3 - \lambda & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(3 - \lambda) \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \xRightarrow{C_1 \rightarrow C_1 - C_2} =$$

$$(3 - \lambda)^2 \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (3 - \lambda)^2 (3 - \lambda) = (3 - \lambda)^3$$

Valeur propre

$$\lambda = 3$$

Espace propre E_3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4-3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3-3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2-3 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \xRightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 + L_1}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x = -\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$E_3 = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Diagonalisation

Comme le seul espace propre est de dimension 2, il est impossible qu'une base de $\mathbb{R}^3$ soit formée de vecteurs propres : la matrice n'est par conséquent pas diagonalisable.

7) Polynôme caractéristique

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & 3 \\ -4 & -6-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 + L_2 + L_3} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \\ -4 & -6-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\ & (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & -6-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{C_2 \rightarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \rightarrow C_3 - C_1}} (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2-\lambda & 1 \\ 3 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \\ & (1-\lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda)^2 \end{aligned}$$

Valeurs propres

$$\lambda = 1 \text{ et } \lambda = -2$$

Espace propre E_1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-1 & 4 & 3 & 0 \\ -4 & -6-1 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 1-1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ -4 & -7 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right) \xRightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 + 4L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 9 & 0 \\ 0 & -9 & -9 & 0 \end{array} \right) \xRightarrow{\substack{L_2 \rightarrow 1/9 L_2 \\ L_3 \rightarrow 1/9 L_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xRightarrow{\substack{L_1 \rightarrow L_1 - 4L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 + L_2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$E_1 = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Espace propre E_{-2}

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 - (-2) & 4 & 3 & 0 \\ -4 & -6 - (-2) & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 1 - (-2) & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 3 & 0 \\ -4 & -4 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow 1/3 L_3} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & -3 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[L_3 \rightarrow L_3 - 4L_1]{L_2 \rightarrow L_2 + 4L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[L_3 \rightarrow L_3 + L_2]{L_1 \rightarrow L_1 - L_2} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x = -\alpha \\ y = \alpha \\ z = 0 \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$E_{-2} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Diagonalisation

Il n'y a pas assez de vecteurs propres linéairement indépendants pour former une base de $\mathbb{R}^3$: la matrice n'est par conséquent pas diagonalisable.

8) Polynôme caractéristique

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 2 \\ 3 & -1 - \lambda & 3 \\ 2 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (-1 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + L_1} =$$

$$(-1 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 - \lambda & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (-1 - \lambda)(3 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \rightarrow C_1 - C_2} =$$

$$(-1 - \lambda)(3 - \lambda) \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1 - \lambda)(3 - \lambda)(-1 - \lambda) = (-1 - \lambda)^2(3 - \lambda)$$

Valeurs propres

$\lambda = -1$ et $\lambda = 3$

Espace propre E_{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 - (-1) & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 - (-1) & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 - (-1) & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[L_3 \rightarrow 1/2 L_3]{L_1 \rightarrow 1/2 L_1, L_2 \rightarrow 1/3 L_2} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[L_3 \rightarrow L_3 - L_1]{L_2 \rightarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} = -\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$E_{-1} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Espace propre E_3

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 0 & 2 & | & 0 \\ 3 & -1-3 & 3 & | & 0 \\ 2 & 0 & 1-3 & | & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{L_1 \rightarrow -1/2 L_1 \\ L_3 \rightarrow 1/2 L_1}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & | & 0 \\ 3 & -4 & 3 & | & 0 \\ 2 & 0 & -2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 3 & -4 & 3 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 3L_1, L_3 \rightarrow L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & -4 & 6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{L_2 \rightarrow -1/4 L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \frac{3}{2}\alpha = \frac{1}{2}\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases} \quad E_3 = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Diagonalisation

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

9) **Polynôme caractéristique**

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)$$

Valeurs propres

$\lambda = 1, \lambda = 2$ et $\lambda = 3$

Espace propre E_1

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1-1 & 4 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 3-1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-1 & | & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{L_3 \leftrightarrow L_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - L_3, L_4 \rightarrow L_4 - 3L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{L_2 \rightarrow 1/2 L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R} \quad E_1 = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Espace propre E_2

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2-2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3-2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xRightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + L_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xRightarrow{L_3 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xRightarrow{\begin{matrix} L_1 \rightarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 5L_2 \end{matrix}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = -\beta \\ x_4 = \beta \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$E_2 = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Espace propre E_3

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2-3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3-3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-3 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \xRightarrow{\begin{matrix} L_1 \rightarrow -L_1 \\ L_2 \rightarrow L_2 - 5L_3 \\ L_4 \rightarrow L_4 + L_3 \end{matrix}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xRightarrow{L_2 \rightarrow -1/2 L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xRightarrow{L_1 \rightarrow L_1 + L_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3\alpha \\ x_2 = 2\alpha \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = 0 \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$E_3 = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Diagonalisation

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$