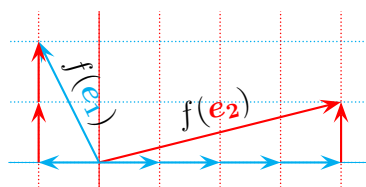
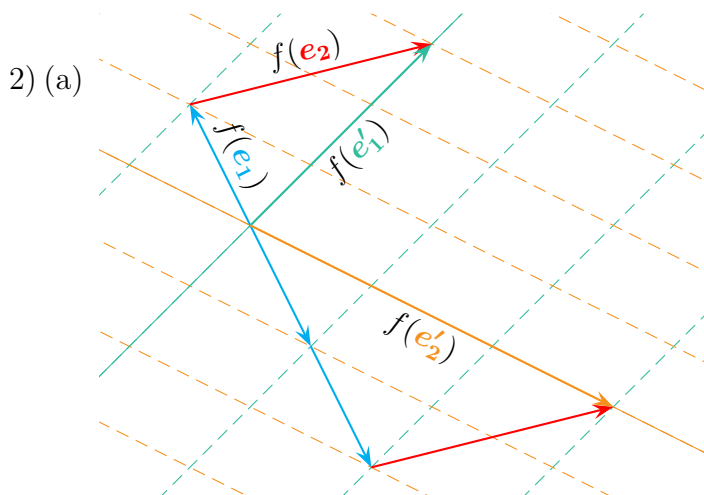


6.3

1) 

$$f(\mathbf{e}_1) = -1\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad f(\mathbf{e}_2) = 4\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad A = \begin{pmatrix} \underbrace{-1}_{f(\mathbf{e}_1)} & \underbrace{4}_{f(\mathbf{e}_2)} \\ \underbrace{2}_{f(\mathbf{e}_1)} & \underbrace{1}_{f(\mathbf{e}_2)} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$



(b) $\mathbf{e}'_2 = -2\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2$
 $f(\mathbf{e}'_2) = f(-2\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2) = -2f(\mathbf{e}_1) + 1f(\mathbf{e}_2)$

(c) $f(\mathbf{e}'_1) = 3\mathbf{e}'_1 + 0\mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$
 $f(\mathbf{e}'_2) = 0\mathbf{e}'_1 - 3\mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ $A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$

3) (a) $\mathbf{e}'_1 = 1\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$
 $\mathbf{e}'_2 = -2\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) On sait que $P^{-1}AP = A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

(c) Commençons par déterminer l'inverse de la matrice de passage :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \rightarrow 3L_1 + 2L_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_1 \rightarrow 1/3 L_1 \\ L_2 \rightarrow 1/3 L_2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1/3 \end{array} \right)$$

Nous pouvons à présent opérer le changement de base :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = A'$$

$$4) \ A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

L'application linéaire f est la composition d'une homothétie de rapport 3 avec une symétrie d'axe e'_1 et de direction e'_2 .