

6.4 La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Commençons par calculer son inverse :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xRightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xRightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons à présent opérer le changement de base :

$$\begin{aligned} A' = P^{-1} A P &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -4 & -4 & 2 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$