6.5 Comme y et z sont des variables libres, l'équation $x+y+z=0$ a pour solutions :
$$\begin{cases} x = -\alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les images des vecteurs directeurs $\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et du vecteur normal $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ du plan $x+y+z=0$ sont évidentes :

$$f(\boldsymbol{v_1}) = \boldsymbol{v_1} \qquad f(\boldsymbol{v_2}) = \boldsymbol{v_2} \qquad f(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{0}$$

Dans la base $\mathscr{B}' = (\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{n})$, la matrice associée à f est évidente :

$$\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour calculer la matrice $\mathrm{A} = \mathrm{P\,A'\,P^{-1}}$, on doit d'abord inverser la matrice P :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{\mathrm{L_2 \to L_2 + L_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{\mathrm{L_3 \to L_3 + L_2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow[\mathrm{L_2 \to 3\,L_2 - 2\,L_3}]{\mathrm{L_1 \to 3\,L_1 - L_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & -3 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{\mathrm{L_1 \to L_1 - L_2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow[\substack{\mathrm{L_2 \to -1/3\,L_2} \\ \mathrm{L_3 \to 1/3\,L_3}}]{\mathrm{L_1 \to -1/3\,L_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Nous pouvons maintenant calculer la matrice A associée à l'application linéaire f relativement à la base canonique :

$$\mathrm{A} = \mathrm{P\,A\,P^{-1}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$