6.6 Comme y et z sont des variables libres, l'équation $2\,x - 3\,y + z = 0 \iff x - \frac{3}{2}\,y + \frac{1}{2}\,z = 0$ a pour solutions : $\begin{cases} x = \frac{3}{2}\,\alpha - \frac{1}{2}\,\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} = \frac{1}{2}\,\alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\,\beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Les images des vecteurs directeurs $\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et du vecteur normal $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ du plan $2\,x - 3\,y + z = 0$ sont évidentes :

$$f(\boldsymbol{v_1}) = \boldsymbol{v_1} \qquad f(\boldsymbol{v_2}) = \boldsymbol{v_2} \qquad f(\boldsymbol{n}) = -\boldsymbol{n}$$

Dans la base $\mathscr{B}' = (\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{n})$, la matrice associée à f est évidente :

$$\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour calculer la matrice $\mathrm{A} = \mathrm{P}\,\mathrm{A}'\,\mathrm{P}^{-1}$, on doit d'abord inverser la matrice P :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_2 \to 3\,\mathrm{L}_2 - 2\,\mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -13 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -13 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to 7\,\mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_2 \to 14\,\mathrm{L}_2 + 13\,\mathrm{L}_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 21 & -7 & 0 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 28 & 0 & -2 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 14 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_1 \to 4\,\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 84 & 0 & 0 & 18 & 15 & 9 \\ 0 & 28 & 0 & -2 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 14 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to -1/84\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \to -1/28\,\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \to 1/14\,\mathrm{L}_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{14} & \frac{5}{28} & \frac{3}{28} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{14} & \frac{3}{28} & \frac{13}{28} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{7} & -\frac{3}{14} & \frac{1}{14} \end{array}\right)$$

Nous pouvons maintenant calculer la matrice A associée à l'application linéaire f relativement à la base canonique :

$$\mathrm{A} = \mathrm{P}\,\mathrm{A}\,\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{14} & \frac{5}{28} & \frac{3}{28} \\ -\frac{1}{14} & \frac{3}{28} & \frac{13}{28} \\ \frac{1}{7} & -\frac{3}{14} & \frac{1}{14} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{14} & \frac{5}{28} & \frac{3}{28} \\ -\frac{1}{14} & \frac{3}{28} & \frac{13}{28} \\ \frac{1}{7} & -\frac{3}{14} & \frac{1}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}$$