6.7 1) L'équation caractéristique est :

$$0 = \det(\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{\mathrm{C}_1 \to \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2}{=} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 3-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1}{=} (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\,(-3-\lambda)$$

Les solutions de l'équation caractéristique sont les valeurs propres :
$\lambda = 3$ et $\lambda = -3$.

2) (a) Déterminons l'espace propre E_3 associé à la valeur propre $\lambda = 3$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1-3 & 4 & 0 \\ 2 & 1-3 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to -1/4\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \to 1/2\,\mathrm{L}_2}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{E}_3 = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

(b) Déterminons l'espace propre E_{-3} associé à la valeur propre $\lambda = -3$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1-(-3) & 4 & 0 \\ 2 & 1-(-3) & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to 1/2\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \to 1/2\,\mathrm{L}_2}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = -2\,\alpha \\ y = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{E}_{-3} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

3) $$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

On peut, bien sûr, aussi proposer comme changement de base :

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$