6.8 1) Le polynôme caractéristique est :

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}-\lambda & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}-\lambda & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}-\lambda \end{vmatrix} \overset{\substack{L_1 \to 3L_1 \\ L_2 \to 3L_2 \\ L_3 \to 3L_3}}{=} \left(\tfrac{1}{3}\right)^3 \begin{vmatrix} 1-3\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-3\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-3\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{L_3 \to L_3+L_2}{=} \frac{1}{27} \begin{vmatrix} 1-3\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-3\lambda & 2 \\ 0 & 3-3\lambda & 3-3\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{27}\underbrace{(3-3\lambda)}_{3(1-\lambda)} \begin{vmatrix} 1-3\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-3\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_2 \to C_2-C_3}{=} \frac{1}{9}(1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-3\lambda & -4 & 2 \\ -2 & -1-3\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}(1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-3\lambda & -4 \\ -2 & -1-3\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_1 \to C_1+C_2}{=} \frac{1}{9}(1-\lambda) \begin{vmatrix} -3-3\lambda & -4 \\ -3-3\lambda & -1-3\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{9}(1-\lambda)\underbrace{(-3-3\lambda)}_{-3(1+\lambda)} \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -1-3\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}(\lambda-1)(\lambda+1) \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -1-3\lambda \end{vmatrix} \overset{L_2 \to L_2-L_1}{=} \frac{1}{3}(\lambda-1)(\lambda+1) \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 3-3\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}(\lambda-1)(\lambda+1)\underbrace{(3-3\lambda)}_{-3(\lambda-1)} = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

Les valeurs propres sont les zéros du polynôme caractéristique :
$\lambda = 1$ et $\lambda = -1$

2) (a) Déterminons l'espace propre E_1 associé à la valeur propre $\lambda = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{3}-1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}-1 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}-1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_1 \to -3/2\, L_1 \\ L_2 \to -3/2\, L_2 \\ L_3 \to 3/2\, L_3}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_2 \to L_2-L_1 \\ L_3 \to L_3-L_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = -\alpha + \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$E_1 = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Pour déterminer l'équation du plan engendré par la base de E_1, on résout le système suivant, pour savoir à quelle condition il est possible.

$$\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{array}\right) \overset{L_2 \to L_2+L_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & x \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 1 & z \end{array}\right)$$

$$\overset{L_3 \to -L_3+L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & x \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & x+y-z \end{array}\right) \qquad E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x+y-z = 0 \right\}$$

(b) Déterminons l'espace propre E_{-1} associé à la valeur propre $\lambda = -1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{3}-(-1) & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}-(-1) & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}-(-1) & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to 3/2\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \to -3/2\,\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \to 3/2\,\mathrm{L}_3}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_3 \leftrightarrow \mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - 2\,\mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to 1/3\,\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \to 1/3\,\mathrm{L}_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_2}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = -\alpha \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \end{cases} = -\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{E}_{-1} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

3) $$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4) Les valeurs propres indiquent qu'il s'agit d'une symétrie de direction $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ par rapport au plan engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vu que la direction de symétrie $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normale au plan de symétrie d'équation $x + y - z = 0$, il s'agit d'une symétrie orthogonale.