6.9 1) Le polynôme caractéristique est :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{10}{19}-\lambda & \frac{9}{19} & -\frac{3}{19} \\ \frac{9}{19} & \frac{10}{19}-\lambda & \frac{3}{19} \\ -\frac{3}{19} & \frac{3}{19} & \frac{18}{19}-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_1 \to C_1 + C_2}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{9}{19} & -\frac{3}{19} \\ 1-\lambda & \frac{10}{19}-\lambda & \frac{3}{19} \\ 0 & \frac{3}{19} & \frac{18}{19}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & \frac{9}{19} & -\frac{3}{19} \\ 1 & \frac{10}{19}-\lambda & \frac{3}{19} \\ 0 & \frac{3}{19} & \frac{18}{19}-\lambda \end{vmatrix} \overset{L_2 \to L_2 - L_1}{=} (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & \frac{9}{19} & -\frac{3}{19} \\ 0 & \frac{1}{19}-\lambda & \frac{6}{19} \\ 0 & \frac{3}{19} & \frac{18}{19}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} \frac{1}{19}-\lambda & \frac{6}{19} \\ \frac{3}{19} & \frac{18}{19}-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_2 \to C_2 - 6\,C_1}{=} (1-\lambda)\begin{vmatrix} \frac{1}{19}-\lambda & 6\,\lambda \\ \frac{3}{19} & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda\,(1-\lambda)\begin{vmatrix} \frac{1}{19}-\lambda & 6 \\ \frac{3}{19} & -1 \end{vmatrix} \overset{L_1 \to L_1 + 6\,L_2}{=} \lambda\,(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ \frac{3}{19} & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda\,(1-\lambda)\,(1-\lambda)\cdot(-1) = -\lambda\,(1-\lambda)^2$$

Les valeurs propres sont les zéros du polynôme caractéristique :
$\lambda = 1$ et $\lambda = 0$

2) (a) Déterminons l'espace propre E_1 associé à la valeur propre $\lambda = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{10}{19}-1 & \frac{9}{19} & -\frac{3}{19} & 0 \\ \frac{9}{19} & \frac{10}{19}-1 & \frac{3}{19} & 0 \\ -\frac{3}{19} & \frac{3}{19} & \frac{18}{19}-1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{9}{19} & \frac{9}{19} & -\frac{3}{19} & 0 \\ \frac{9}{19} & -\frac{9}{19} & \frac{3}{19} & 0 \\ -\frac{3}{19} & \frac{3}{19} & -\frac{1}{19} & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_1 \to -19/3\,L_1 \\ L_2 \to 19/3\,L_2 \\ L_3 \to -19\,L_3}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{L_1 \to 1/3\,L_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = \alpha - \frac{1}{3}\,\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\,\beta\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$E_1 = \left\{ \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Pour déterminer l'équation du plan engendré par la base de E_1, on résout le système suivant, pour savoir à quelle condition il est possible.

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 3 & z \end{array}\right) \overset{L_2 \to L_2 - L_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & -x+y \\ 0 & 3 & z \end{array}\right)$$

$$\overset{L_3 \to L_3 - 3\,L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & -x+y \\ 0 & 0 & 3\,x - 3\,y + z \end{array}\right)$$

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 3\,x - 3\,y + z = 0 \right\}$$

(b) Déterminons l'espace propre E_0 associé à la valeur propre $\lambda = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{10}{19}-0 & \frac{9}{19} & -\frac{3}{19} & 0 \\ \frac{9}{19} & \frac{10}{19}-0 & \frac{3}{19} & 0 \\ -\frac{3}{19} & \frac{3}{19} & \frac{18}{19}-0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{10}{19} & \frac{9}{19} & -\frac{3}{19} & 0 \\ \frac{9}{19} & \frac{10}{19} & \frac{3}{19} & 0 \\ -\frac{3}{19} & \frac{3}{19} & \frac{18}{19} & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_1 \to 19\,L_1 \\ L_2 \to 19\,L_2 \\ L_3 \to -19/3\,L_3}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 9 & -3 & 0 \\ 9 & 10 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}\right) \overset{L_3 \leftrightarrow L_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -6 & 0 \\ 9 & 10 & 3 & 0 \\ 10 & 9 & -3 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_2 \to L_2 - 9\,L_1 \\ L_3 \to L_3 - 10\,L_1}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 19 & 57 & 0 \\ 0 & 19 & 57 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_2 \to 1/19\,L_2 \\ L_3 \to 1/19\,L_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_1 \to L_1 + L_2 \\ L_3 \to L_3 + L_2}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = 3\,\alpha \\ y = -3\,\alpha \\ z = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$E_0 = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

3) $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{10}{19} & \frac{9}{19} & -\frac{3}{19} \\ \frac{9}{19} & \frac{10}{19} & \frac{3}{19} \\ -\frac{3}{19} & \frac{3}{19} & \frac{18}{19} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Les valeurs propres indiquent qu'il s'agit d'une projection de direction $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sur le plan engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Vu que la direction de projection $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normale au plan de projection d'équation $3\,x - 3\,y + z = 0$, il s'agit d'une projection orthogonale.