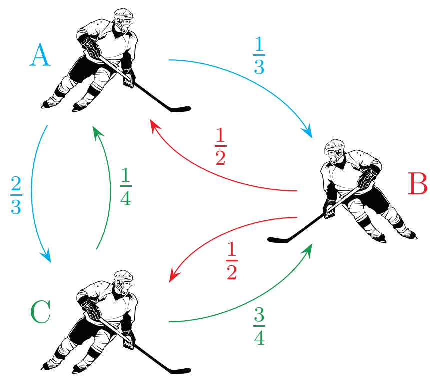
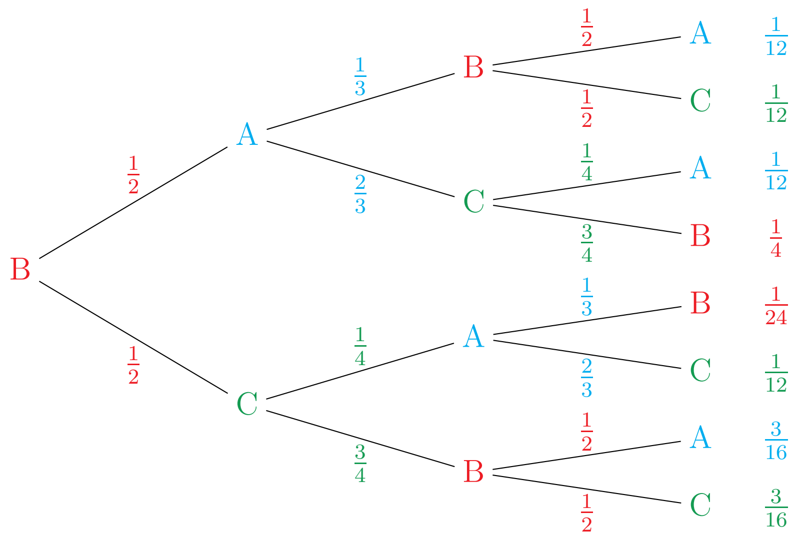
7 Chaînes de Markov

Exemple 7.1 Dans une équipe de hockey, on étudie les passes de la rondelle que font les trois joueurs A, B et C entre eux. Les probabilités qu'un joueur passe la rondelle à un autre sont représentées sur le graphe ci-dessous.



Si le joueur B possède la rondelle au début du jeu, quelle est la probabilité, pour chacun des joueurs A, B et C, qu'il possède la rondelle après 3 passes ?

Le cours de probabilités propose de résoudre ce problème à l'aide d'un arbre.



La probabilité pour chacun des joueurs d'avoir la rondelle après 3 passes vaut :

$$\begin{array}{lcl}
\text{Joueur A :} & \frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{3}{16} & = \frac{17}{48} \\
\text{Joueur B :} & \frac{1}{4}+\frac{1}{24} & = \frac{7}{24} \\
\text{Joueur A :} & \frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{3}{16} & = \frac{17}{48}
\end{array}$$

L'inconvénient de cette méthode ne tarde pas à se manifester, si l'on pose la même question après 5, 10 ou 20 passes : l'arbre devient tellement gigantesque qu'il devient pratiquement impossible à réaliser.

Voyons comment résoudre ce même problème à l'aide de l'algèbre linéaire.
Écrivons la solution que l'on a obtenue sous la forme d'un vecteur :

$$\begin{pmatrix} \frac{17}{48} \\ \frac{7}{24} \\ \frac{17}{48} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{probabilité que le joueur A ait la rondelle après 3 passes} \\ \text{probabilité que le joueur B ait la rondelle après 3 passes} \\ \text{probabilité que le joueur C ait la rondelle après 3 passes} \end{pmatrix}$$

Un tel vecteur, ayant des composantes non négatives dont la somme vaut 1, s'appelle un **vecteur de probabilités**.

Une quatrième passe aurait pour effet de modifier ce vecteur de probabilités. Pour savoir comment s'effectue cette modification, on va considérer qu'une passe n'est rien d'autre qu'une application linéaire $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui transforme les vecteurs de probabilités. Pour déterminer la matrice associée à f relativement à la base canonique $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$, il suffit de connaître $f(\boldsymbol{e_1}), f(\boldsymbol{e_2}), f(\boldsymbol{e_3})$.

$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ exprime le fait que l'on sait, sans le moindre doute, que c'est le joueur A qui possède la rondelle. On connaît parfaitement la façon dont la prochaine passe va modifier ce vecteur de probabilités : $f(\boldsymbol{e_1}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ traduit la certitude que c'est le joueur B qui est en possession de la rondelle. On sait comment la prochaine passe va modifier ce vecteur de probabilités : $f(\boldsymbol{e_2}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ garantit que le joueur C détient la rondelle. La prochaine passe va modifier comme suit ce vecteur de probabilités : $f(\boldsymbol{e_3}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$.

L'application linéaire $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est ainsi définie par $f(\boldsymbol{v}) = \mathrm{A}\,\boldsymbol{v}$ avec

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{matrix}}_{f(\boldsymbol{e_1})} & \underbrace{\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{matrix}}_{f(\boldsymbol{e_2})} & \underbrace{\begin{matrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 0 \end{matrix}}_{f(\boldsymbol{e_3})} \end{pmatrix}$$

La matrice A s'appelle une **matrice de transition** ou encore une **matrice stochastique**[1]. Ses colonnes sont constituées de vecteurs de probabilités.

1. Le terme « stochastique » provient du mot grec στοχαστής qui signifie le « devin ».

La succession des passes se modélise par une **chaîne de Markov** :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\text{état initial} & \xrightarrow{f} & 1^{\text{re}} \text{ passe} & \xrightarrow{f} & 2^{\text{e}} \text{ passe} & \xrightarrow{f} & 3^{\text{e}} \text{ passe} & \dashrightarrow & n\text{-ième passe} \\
\boldsymbol{v_0} = \boldsymbol{e_2} & & \begin{aligned} \boldsymbol{v_1} &= \mathrm{A}\, \boldsymbol{v_0} \\ &= \mathrm{A}\, \boldsymbol{e_2} \end{aligned} & & \begin{aligned} \boldsymbol{v_2} &= \mathrm{A}\, \boldsymbol{v_1} \\ &= \mathrm{A}^2\, \boldsymbol{e_2} \end{aligned} & & \begin{aligned} \boldsymbol{v_3} &= \mathrm{A}\, \boldsymbol{v_2} \\ &= \mathrm{A}^3\, \boldsymbol{e_2} \end{aligned} & & \begin{aligned} \boldsymbol{v_n} &= \mathrm{A}\, \boldsymbol{v_{n-1}} \\ &= \mathrm{A}^n\, \boldsymbol{e_2} \end{aligned}
\end{array}$$

Procédons aux calculs correspondants :

1$^{\text{re}}$ passe $\quad \boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

2$^{\text{e}}$ passe $\quad \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{13}{24} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{13}{24} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{13}{24} \end{pmatrix}$

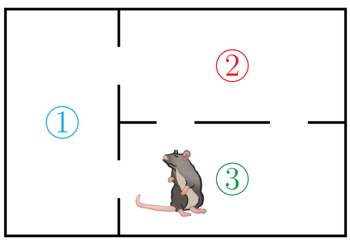
3$^{\text{e}}$ passe $\quad \boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{13}{24} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{48} \\ \frac{7}{24} \\ \frac{17}{48} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A}^3 = \begin{pmatrix} \frac{7}{24} & \frac{17}{48} & \frac{17}{96} \\ \frac{17}{72} & \frac{7}{24} & \frac{17}{32} \\ \frac{17}{36} & \frac{17}{48} & \frac{7}{24} \end{pmatrix}$

Les avantages de cette méthode, en comparaison de l'arbre, sont évidents :

— on peut poursuivre sans problème les calculs pour connaître les résultats après un plus grand nombre de passes ;

— si l'on change la situation initiale, il n'y a nul besoin de refaire tous les calculs : les colonnes 1, 2 et 3 de la matrice A^3 donnent les résultats, selon que le joueur A, B ou C possède initialement la rondelle.

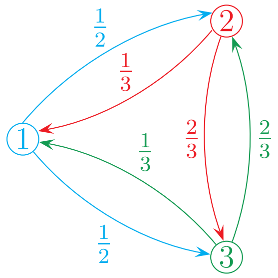
Exemple 7.2 Une souris se déplace dans les trois pièces du labyrinthe représenté ci-dessous. À chaque déplacement, elle choisit une porte au hasard.



Si la souris se trouve initialement dans la troisième pièce, quelle est la probabilité qu'elle se trouve dans la deuxième pièce après :

1) 2 déplacements ? 2) 3 déplacements ? 3) 4 déplacements ?

Les déplacements de la souris sont représentés par le graphe et la matrice de transition que voici :



$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons les probabilités correspondant aux déplacements de la souris :

1$^{\text{er}}$ déplacement $\quad \boldsymbol{v_1} = A\,\boldsymbol{v_0} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

2$^{\text{e}}$ déplacement $\quad \boldsymbol{v_2} = A\,\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{11}{18} \end{pmatrix}$

3$^{\text{e}}$ déplacement $\quad \boldsymbol{v_3} = A\,\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{9} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{11}{18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{27} \\ \frac{14}{27} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix}$

4$^{\text{er}}$ déplacement $\quad \boldsymbol{v_4} = A\,\boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{27} \\ \frac{14}{27} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{81} \\ \frac{5}{18} \\ \frac{77}{162} \end{pmatrix}$

Les réponses aux questions posées sont : 1) $\frac{1}{6}$ 2) $\frac{14}{27}$ 3) $\frac{5}{18}$.

7.1 Compléter les coefficients manquants de la matrice stochastique suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & * & \frac{1}{5} \\ * & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & * \end{pmatrix}$$

7.2 Les matrices suivantes sont-elles stochastiques ? Sinon, expliquer pourquoi.

1) $\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{7}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{7}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{11}{10} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$

7.3 Dans une ville, la météo est ensoleillée, nuageuse ou pluvieuse. Des études climatologiques ont montré que :

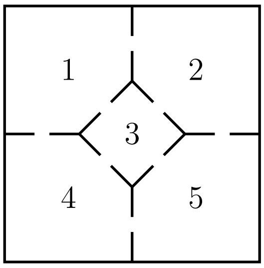
— si un jour est ensoleillé, le jour suivant sera ensoleillé avec une probabilité de 70 %, nuageux avec une probabilité de 10 % et pluvieux avec une probabilité de 20 % ;

— si un jour est nuageux, le jour suivant sera ensoleillé avec une probabilité de 20 %, nuageux avec une probabilité de 30 % et pluvieux avec une probabilité de 50 % ;

— si un jour est pluvieux, le jour suivant sera ensoleillé avec une probabilité de 30 %, nuageux avec une probabilité de 10 % et pluvieux avec une probabilité de 60 %.

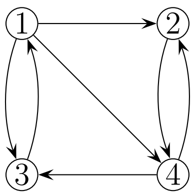
Supposons que lundi la météo soit nuageuse. Déterminer les probabilités que vendredi soit ensoleillé, nuageux ou pluvieux.

7.4 Une souris est placée dans la deuxième pièce du labyrinthe suivant :



1) Déterminer la matrice de transition et le vecteur initial de probabilités correspondants aux déplacements de la souris.
2) Quelles sont les probabilités pour la souris de se trouver dans chacune des pièces après deux déplacements ?

7.5 Le graphe suivant représente quatre pages web et les liens qui permettent de naviguer d'une page à l'autre.



Un internaute navigue complètement au hasard en cliquant aléatoirement sur un lien pour passer d'une page à l'autre. S'il démarre sur la page 1, quelles sont les probabilités qu'il se trouve sur les différentes pages après 3 clics ?

Prédictions à long terme

Exemple 7.3 Revenons à l'exemple 7.2 et recherchons les probabilités que la souris se trouve dans chacune des pièces du labyrinthe sur le long terme.

Il nous faut commencer par déterminer ces probabilités pour un nombre n quelconque de déplacements. Cela nécessite de calculer A^n : nous allons par conséquent tenter de diagonaliser la matrice A.

Valeurs propres

$$\begin{aligned}
\det(\mathrm{A}-\lambda\,\mathrm{I}) &= \begin{vmatrix} 0-\lambda & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0-\lambda & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0-\lambda \end{vmatrix} \overset{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1+\mathrm{L}_2+\mathrm{L}_3}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\lambda \end{vmatrix} \overset{\substack{\mathrm{C}_2 \to \mathrm{C}_2-\mathrm{C}_1 \\ \mathrm{C}_3 \to \mathrm{C}_3-\mathrm{C}_1}}{=} (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} \overset{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1+\mathrm{L}_2}{=} (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\frac{1}{3}-\lambda & -\frac{1}{3}-\lambda \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\,(-\tfrac{1}{3}-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} \overset{\mathrm{C}_2 \to \mathrm{C}_2-\mathrm{C}_1}{=} (1-\lambda)\,(-\tfrac{1}{3}-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3}-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\,(-\tfrac{1}{3}-\lambda)\,(-\tfrac{2}{3}-\lambda)
\end{aligned}$$

Nous avons obtenu trois valeurs propres : $\lambda = 1$, $\lambda = -\frac{1}{3}$ et $\lambda = -\frac{2}{3}$.

Espace propre E_1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0-1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0-1 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0-1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\mathrm{L}_1 \to 3\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \to 6\,\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \to 6\,\mathrm{L}_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & -6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2+\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3+\mathrm{L}_1}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\mathrm{L}_2 \to -1/5\,\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \to 1/5\,\mathrm{L}_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1-\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3-\mathrm{L}_2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{L}_1 \to -1/3\,\mathrm{L}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \mathrm{E}_1 = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Espace propre $\mathrm{E}_{-\frac{1}{3}}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0-(-\frac{1}{3}) & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0-(-\frac{1}{3}) & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0-(-\frac{1}{3}) & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\mathrm{L}_1 \to 3\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \to 6\,\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \to 6\,\mathrm{L}_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\mathrm{L}_2 \to -\mathrm{L}_2+3\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3-3\,\mathrm{L}_1}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1-\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3-\mathrm{L}_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \mathrm{E}_{-\frac{1}{3}} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Espace propre $\mathrm{E}_{-\frac{2}{3}}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0-(-\frac{2}{3}) & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0-(-\frac{2}{3}) & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0-(-\frac{2}{3}) & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to 3\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \to 6\,\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \to 6\,\mathrm{L}_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to 2\,\mathrm{L}_2 - 3\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \to 2\,\mathrm{L}_3 - 3\,\mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to 1/5\,\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \to 1/5\,\mathrm{L}_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{L}_1 \to 1/2\,\mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \mathrm{E}_{-\frac{2}{3}} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Il reste encore à calculer l'inverse de la matrice de passage :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to 2\,\mathrm{L}_2 - 3\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \to 2\,\mathrm{L}_3 - 3\,\mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_2 \to 2\,\mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & -6 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_1 \to 8\,\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 16 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 16 & 0 & -6 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to 1/16\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \to 1/16\,\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \to 1/4\,\mathrm{L}_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Nous pouvons à présent calculer A^n :

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^n &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{3})^n & 0 \\ 0 & 0 & (-\frac{2}{3})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(-\frac{1}{3})^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^n \\ \frac{3}{8} - \frac{3}{8}(-\frac{1}{3})^n & \frac{3}{8} + \frac{1}{8}(-\frac{1}{3})^n + \frac{1}{2}(-\frac{2}{3})^n & \frac{3}{8} + \frac{1}{8}(-\frac{1}{3})^n - \frac{1}{2}(-\frac{2}{3})^n \\ \frac{3}{8} - \frac{3}{8}(-\frac{1}{3})^n & \frac{3}{8} + \frac{1}{8}(-\frac{1}{3})^n - \frac{1}{2}(-\frac{2}{3})^n & \frac{3}{8} + \frac{1}{8}(-\frac{1}{3})^n + \frac{1}{2}(-\frac{2}{3})^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour déterminer les probabilités à long terme, il faut calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \qquad \text{puisque } \lim_{n\to+\infty} (-\tfrac{1}{3})^n = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} (-\tfrac{2}{3})^n = 0.$$

On remarque que les colonnes de la matrice $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{A}^n$ sont toutes identiques. Cela signifie que la situation initiale n'a aucune incidence sur le comportement à long terme : quelle que soit la pièce dans laquelle la souris est initialement placée, les probabilités sur le long terme pour la souris de se trouver dans les différentes pièces sont exactement les mêmes.

On peut aussi calculer plus simplement les probabilités à long terme en exprimant le vecteur initial de probabilités $\boldsymbol{v_0}$ comme combinaison linéaire des vecteurs propres $\boldsymbol{e'_1}, \boldsymbol{e'_2}, \boldsymbol{e'_3}$. On vérifie :

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \tfrac{1}{8}\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix} + \tfrac{1}{8}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boldsymbol{v_0} = \tfrac{1}{8}\,\boldsymbol{e'_1} + \tfrac{1}{8}\,\boldsymbol{e'_2} + \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{e'_3}.$$

Calculons les vecteurs de probabilités des premiers déplacements :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v_1} &= \mathrm{A}\,\boldsymbol{v_0} = \mathrm{A}\left(\tfrac{1}{8}\,\boldsymbol{e'_1} + \tfrac{1}{8}\,\boldsymbol{e'_2} + \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{e'_3}\right) = \tfrac{1}{8}\underbrace{\mathrm{A}\,\boldsymbol{e'_1}}_{1\,\boldsymbol{e'_1}} + \tfrac{1}{8}\underbrace{\mathrm{A}\,\boldsymbol{e'_2}}_{-\frac{1}{3}\,\boldsymbol{e'_2}} + \tfrac{1}{2}\underbrace{\mathrm{A}\,\boldsymbol{e'_3}}_{-\frac{2}{3}\,\boldsymbol{e'_3}}\\ &= \tfrac{1}{8}\,\boldsymbol{e'_1} + \tfrac{1}{8}\left(-\tfrac{1}{3}\right)\boldsymbol{e'_2} + \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{2}{3}\right)\boldsymbol{e'_3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v_2} &= \mathrm{A}\,\boldsymbol{v_1} = \mathrm{A}\left(\tfrac{1}{8}\,\boldsymbol{e'_1} + \tfrac{1}{8}\left(-\tfrac{1}{3}\right)\boldsymbol{e'_2} + \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{2}{3}\right)\boldsymbol{e'_3}\right) = \tfrac{1}{8}\underbrace{\mathrm{A}\,\boldsymbol{e'_1}}_{1\,\boldsymbol{e'_1}} + \tfrac{1}{8}\left(-\tfrac{1}{3}\right)\underbrace{\mathrm{A}\,\boldsymbol{e'_2}}_{-\frac{1}{3}\,\boldsymbol{e'_2}} + \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{2}{3}\right)\underbrace{\mathrm{A}\,\boldsymbol{e'_3}}_{-\frac{2}{3}\,\boldsymbol{e'_3}}\\ &= \tfrac{1}{8}\,\boldsymbol{e'_1} + \tfrac{1}{8}\left(-\tfrac{1}{3}\right)^2\boldsymbol{e'_2} + \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{2}{3}\right)^2\boldsymbol{e'_3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v_3} &= \mathrm{A}\,\boldsymbol{v_1} = \mathrm{A}\left(\tfrac{1}{8}\,\boldsymbol{e'_1} + \tfrac{1}{8}\left(-\tfrac{1}{3}\right)^2\boldsymbol{e'_2} + \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{2}{3}\right)^2\boldsymbol{e'_3}\right) = \tfrac{1}{8}\underbrace{\mathrm{A}\,\boldsymbol{e'_1}}_{1\,\boldsymbol{e'_1}} + \tfrac{1}{8}\left(-\tfrac{1}{3}\right)^2\underbrace{\mathrm{A}\,\boldsymbol{e'_2}}_{-\frac{1}{3}\,\boldsymbol{e'_2}} + \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{2}{3}\right)^2\underbrace{\mathrm{A}\,\boldsymbol{e'_3}}_{-\frac{2}{3}\,\boldsymbol{e'_3}}\\ &= \tfrac{1}{8}\,\boldsymbol{e'_1} + \tfrac{1}{8}\left(-\tfrac{1}{3}\right)^3\boldsymbol{e'_2} + \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{2}{3}\right)^3\boldsymbol{e'_3}\end{aligned}$$

De même, on obtient le vecteur de probabilités après n déplacements :
$\boldsymbol{v_n} = \tfrac{1}{8}\,\boldsymbol{e'_1} + \tfrac{1}{8}\left(-\tfrac{1}{3}\right)^n\boldsymbol{e'_2} + \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{2}{3}\right)^n\boldsymbol{e'_3}$

Pour obtenir les probabilités sur le long terme, on passe à la limite :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\boldsymbol{v_n} &= \lim_{n\to+\infty}\left(\tfrac{1}{8}\,\boldsymbol{e'_1} + \tfrac{1}{8}\left(-\tfrac{1}{3}\right)^n\boldsymbol{e'_2} + \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{2}{3}\right)^n\boldsymbol{e'_3}\right)\\ &= \tfrac{1}{8}\,\boldsymbol{e'_1} + \tfrac{1}{8}\left(\lim_{n\to+\infty}\left(-\tfrac{1}{3}\right)^n\right)\boldsymbol{e'_2} + \tfrac{1}{2}\left(\lim_{n\to+\infty}\left(-\tfrac{2}{3}\right)^n\right)\boldsymbol{e'_3}\\ &= \tfrac{1}{8}\,\boldsymbol{e'_1} + 0\,\boldsymbol{e'_2} + 0\,\boldsymbol{e'_3}\\ &= \tfrac{1}{8}\,\boldsymbol{e'_1} = \tfrac{1}{8}\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{3}{8}\\\frac{3}{8}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Expliquons également pourquoi le choix du vecteur initial de probabilités ne joue aucun rôle dans le résultat à long terme. Considérons un vecteur initial $\boldsymbol{v_0}$ quelconque. On vérifie :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \tfrac{x+y+z}{8}\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix} + \tfrac{-3\,x+y+z}{8}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} + \tfrac{-y+z}{2}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Exactement comme ci-dessus, les probabilités à long terme sont données par :

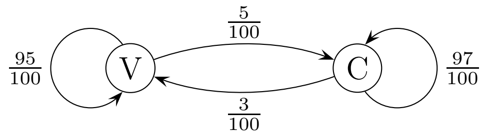
$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\boldsymbol{v_n} &= \lim_{n\to+\infty}\left(\tfrac{x+y+z}{8}\,\boldsymbol{e'_1} + \tfrac{-3\,x+y+z}{8}\left(-\tfrac{1}{3}\right)^n\boldsymbol{e'_2} + \tfrac{-y+z}{2}\left(-\tfrac{2}{3}\right)^n\boldsymbol{e'_3}\right)\\ &= \tfrac{x+y+z}{8}\,\boldsymbol{e'_1} + \tfrac{-3\,x+y+z}{8}\left(\lim_{n\to+\infty}\left(-\tfrac{1}{3}\right)^n\right)\boldsymbol{e'_2} + \tfrac{-y+z}{2}\left(\lim_{n\to+\infty}\left(-\tfrac{2}{3}\right)^n\right)\boldsymbol{e'_3}\end{aligned}$$

$$= \tfrac{x+y+z}{8}\,\boldsymbol{e'_1} + 0\,\boldsymbol{e'_2} + 0\,\boldsymbol{e'_3} = \tfrac{x+y+z}{8}\,\boldsymbol{e'_1}$$

Mais $x{+}y{+}z = 1$: c'est la somme des composantes d'un vecteur de probabilité.

$$\lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{v_n} = \tfrac{1}{8}\,\boldsymbol{e'_1} = \tfrac{1}{8}\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{3}{8}\\\frac{3}{8}\end{pmatrix}$$

7.6 Des études démographiques d'une région montrent que, chaque année, 5 % de la population urbaine migre à la campagne, tandis que 3 % de la population rurale migre en ville.



Déterminer les pourcentages des populations urbaine et rurale sur le long terme.

7.7 Dans le monde d'Oz, la météo se comporte de façon très bizarre :

— il n'y a jamais deux jours ensoleillés consécutifs ;

— un jour ensoleillé est suivi d'un jour pluvieux ou enneigé avec la même probabilité ;

— toute journée pluvieuse ou enneigée est suivie d'une journée semblable avec une probabilité $\frac{1}{2}$; autrement, si le climat change, il y a une chance sur deux que ce soit une journée ensoleillée.

En moyenne, quelles sont les proportions de journées ensoleillées, pluvieuses et enneigées ?

Exemple 7.4 Reprenons l'exemple 7.1 pour déterminer, sur le long terme, comment les trois hockeyeurs se répartissent la possession de la rondelle.

Commençons par le calcul des valeurs propres.

$$\det(\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0-\lambda & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0-\lambda \end{vmatrix} \overset{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_3}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \\ \frac{1}{3} & -\lambda & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\lambda & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} \overset{\substack{\mathrm{C}_2 \to \mathrm{C}_2 - \mathrm{C}_1 \\ \mathrm{C}_3 \to \mathrm{C}_3 - \mathrm{C}_1}}{=} (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}-\lambda & \frac{5}{12} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\Big(\big(-\tfrac{1}{3}-\lambda\big)\big(-\tfrac{2}{3}-\lambda\big) - \big(-\tfrac{1}{6}\big)\cdot\tfrac{5}{12}\Big)$$

$$= (1-\lambda)\,\big(\lambda^2 + \lambda + \tfrac{7}{24}\big)$$

$\lambda = 1$ est la seule valeur propre, car $\Delta = 1^2 - 4\cdot 1\cdot \frac{7}{24} = -\frac{1}{6} < 0$.

Déterminons l'espace propre correspondant :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0-1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0-1 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0-1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_1 \to 4\,L_1 \\ L_2 \to 12\,L_2 \\ L_3 \to 6\,L_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & -12 & 9 & 0 \\ 4 & 3 & -6 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_2 \to L_2 + L_1 \\ L_3 \to L_3 + L_1}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 10 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_2 \to -1/10\,L_2 \\ L_3 \to 1/5\,L_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_2 \to L_1 - 2\,L_2 \\ L_3 \to L_3 + L_2}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{L_1 \to -1/4\,L_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow E_1 = \left\{\alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ n'est donc pas diagonalisable.

Si l'on calcule toutefois quelques puissances de cette matrice à l'aide d'un logiciel [2], les résultats sont frappants :

$$A^5 = \begin{pmatrix} 0{,}30282 & 0{,}28733 & 0{,}23481 \\ 0{,}31308 & 0{,}36458 & 0{,}40061 \\ 0{,}3831 & 0{,}34809 & 0{,}36458 \end{pmatrix} \qquad A^{10} = \begin{pmatrix} 0{,}27222 & 0{,}27378 & 0{,}27205 \\ 0{,}36274 & 0{,}36232 & 0{,}36562 \\ 0{,}36505 & 0{,}36389 & 0{,}36232 \end{pmatrix}$$

$$A^{15} = \begin{pmatrix} 0{,}27264 & 0{,}27273 & 0{,}27279 \\ 0{,}36371 & 0{,}36359 & 0{,}36362 \\ 0{,}36364 & 0{,}36368 & 0{,}36359 \end{pmatrix} \qquad A^{20} = \begin{pmatrix} 0{,}27273 & 0{,}27273 & 0{,}27273 \\ 0{,}36364 & 0{,}36364 & 0{,}36363 \\ 0{,}36363 & 0{,}36364 & 0{,}36364 \end{pmatrix}$$

Il semble bien que les colonnes des puissances de la matrice A tendent vers un même vecteur de probabilités $\boldsymbol{v}$.
À supposer qu'une telle convergence existe bien, posons $\boldsymbol{v} = \lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{v_n}$.
En effectuant le passage à la limite pour la relation $\boldsymbol{v_n} = A\,\boldsymbol{v_{n-1}}$, on obtient :

$$\boldsymbol{v} = \lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{v_n} = \lim_{n\to+\infty} A\,\boldsymbol{v_{n-1}} = A\,(\lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{v_n - 1}) = A\,\boldsymbol{v}$$

Le vecteur $\boldsymbol{v}$ est donc un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$.
C'est pourquoi $\boldsymbol{v} \in E_1$. Vu que le vecteur $\boldsymbol{v}$ doit être un vecteur de probabilités et que $3 + 4 + 4 = 11$, on conclut que

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} \\ \frac{4}{11} \\ \frac{4}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}\overline{27} \\ 0{,}\overline{36} \\ 0{,}\overline{36} \end{pmatrix}$$

Cela signifie qu'à long terme, les joueurs A, B et C détiennent respectivement la rondelle les $\frac{3}{11}$, $\frac{4}{11}$ et $\frac{4}{11}$ du temps de jeu.

2. Dans GeoGebra `A={{0,1/2,1/4},{1/3,0,3/4},{2/3,1/2,0}}` définit la matrice A dont on peut ensuite calculer les puissances, par exemple `A^5` ou `A^10`.

Un vecteur de probabilités $\boldsymbol{v}$ tel que $\mathrm{A}\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$, c'est-à-dire un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$, s'appelle un **vecteur stationnaire**.

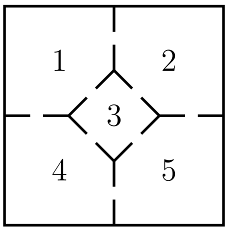
Toute matrice stochastique possède toujours un vecteur stationnaire.
En effet, les colonnes d'une matrice stochastique A sont des vecteurs de probabilités, dont la somme des composantes vaut 1. Lorsqu'on calcule $\det(\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I})$ et que l'on commence par additionner toutes les lignes sur la première ligne, celle-ci contiendra partout le même coefficient $1-\lambda$, que l'on pourra mettre en évidence. Le polynôme caractéristique admettra ainsi la valeur propre $\lambda = 1$.

En résumé, pour prédire le comportement d'une chaîne de Markov à long terme, il suffit, pour autant qu'elle converge, de déterminer son vecteur stationnaire qui appartient à l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$.

On vérifie, par exemple, aux exercices 7.6 et 7.7, que la solution est un vecteur stationnaire, c'est-à-dire un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} \frac{95}{100} & \frac{3}{100} \\ \frac{5}{100} & \frac{97}{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Exemple 7.5 Reprenons l'exercice 7.4 pour déterminer quelle proportion de son temps la souris passe en moyenne dans chaque pièce du labyrinthe.



$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons le vecteur stationnaire de cette chaîne de Markov :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0-1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0-1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0-1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} & 0-1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0-1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to 12\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \to 12\,\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \to 3\,\mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_4 \to 12\,\mathrm{L}_4 \\ \mathrm{L}_5 \to 12\,\mathrm{L}_5}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} -12 & 4 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -12 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & -12 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & -12 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_3 \leftrightarrow \mathrm{L}_1}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -12 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ -12 & 4 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & -12 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & -12 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - 4\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + 12\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_4 \to \mathrm{L}_4 - 4\,\mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -16 & 15 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & -33 & 16 & 12 & 0 \\ 0 & -4 & 15 & -16 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & -12 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_4 \leftrightarrow \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & -12 & 0 \\ 0 & 16 & -33 & 16 & 12 & 0 \\ 0 & -4 & 15 & -16 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 15 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - 4\,\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_4 \to \mathrm{L}_4 + \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_5 \to \mathrm{L}_5 + 4\,\mathrm{L}_2}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -45 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & -12 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 27 & 12 & -48 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_3 \to {}^1\!/_{15}\,\mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_4 \to {}^1\!/_6\,\mathrm{L}_4 \\ \mathrm{L}_5 \to {}^1\!/_3\,\mathrm{L}_5}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 4 & -16 & 0 \end{array}\right) \underset{\Longrightarrow}{\begin{array}{c} L_4 \to L_4 + L_3 \\ L_5 \to L_5 + 3\,L_3 \end{array}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right) \underset{\Longrightarrow}{\begin{array}{c} L_4 \to -{}^1\!/\!_2\, L_4 \\ L_5 \to {}^1\!/\!_4\, L_5 \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\Longrightarrow}{\begin{array}{c} L_1 \to L_1 - L_4 \\ L_2 \to L_2 - 4\,L_4 \\ L_5 \to L_5 - L_4 \end{array}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\Longrightarrow}{\begin{array}{c} L_1 \to L_1 - L_3 \\ L_2 \to L_2 + L_3 \end{array}}$$

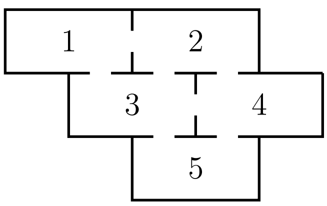
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\Longrightarrow}{\begin{array}{c} L_2 \to {}^1\!/\!_4\, L_2 \\ L_3 \to -{}^1\!/\!_3\, L_3 \end{array}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\Longrightarrow}{L_1 \to L_1 - L_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \frac{4}{3}\,\alpha \\ x_4 = \alpha \\ x_5 = \alpha \end{cases} = \frac{1}{3}\,\alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}$$

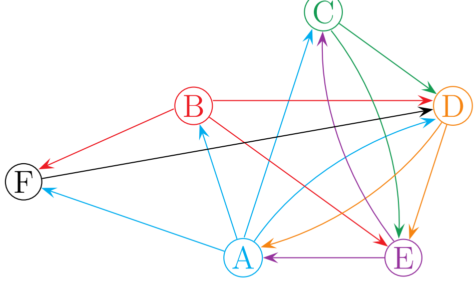
Comme $3 + 3 + 4 + 3 + 3 = 16$, le vecteur stationnaire est $\begin{pmatrix} \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} \\ \frac{4}{16} \\ \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} \end{pmatrix}$.

Sous réserve que cette chaîne de Markov converge bien, la souris passe les $\frac{3}{16}$ de son temps dans la pièce 1, les $\frac{3}{16}$ dans la pièce 2, les $\frac{4}{16}$ dans la pièce 3, les $\frac{3}{16}$ dans la pièce 4 et les $\frac{3}{16}$ dans la pièce 5.

7.8 En moyenne, quelle proportion de temps passe une souris dans chacune des pièces du labyrinthe suivant ?

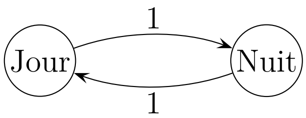


7.9 Le graphe suivant représente six pages web et les liens qui permettent de naviguer d'une page à l'autre.



Un internaute navigue complètement au hasard en cliquant aléatoirement sur un lien pour passer d'une page à l'autre. Déterminer la proportion de temps, à long terme, que passera l'internaute sur chacune des pages.

Exemple 7.6 Voici une chaîne de Markov et sa matrice de transition :



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie que cette chaîne de Markov admet pour vecteur stationnaire :

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{car} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{c'est-à-dire} \quad A\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}.$$

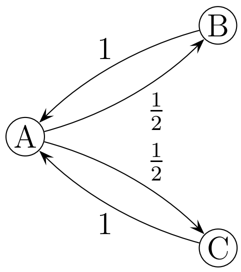
Pourtant, contrairement aux exemples 7.3 et 7.4, les puissances de la matrice A ne convergent nullement :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{etc.}$$

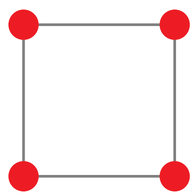
Cette chaîne de Markov ne converge pas : elle oscille en permanence entre ses deux états, le jour et la nuit, sans jamais se stabiliser.

Cet exemple attire notre attention sur cette difficulté :
- toute chaîne de Markov convergente converge vers un vecteur stationnaire ;
- toute chaîne de Markov possède un vecteur stationnaire ;
- mais une chaîne de Markov n'est pas nécessairement convergente.

7.10 Montrer que la chaîne de Markov suivante ne converge pas.



7.11 Un ivrogne se déplace dans les quatre bistrots du village (voir le plan ci-contre) de la façon suivante : en sortant d'un bistrot, il lance une pièce de monnaie pour savoir dans lequel des deux bistrots les plus proches il entrera.



1) Modéliser ce processus à l'aide d'une chaîne de Markov.
2) Montrer que cette chaîne de Markov ne converge pas, bien qu'elle possède un vecteur stationnaire.

Il existe un critère suffisant pour savoir si une chaîne de Markov converge : il faut que sa matrice de transition A soit **régulière**, c'est-à-dire telle que l'une de ses puissances A^k ne possède que des coefficients strictement positifs.

Théorème 7.1 (Théorème de Perron-Frobenius) *Si une matrice de transition* A *est régulière, alors les affirmations suivantes sont vérifiées :*

— *quel que soit le vecteur de probabilités initial* $\boldsymbol{v_0}$*, la chaîne de Markov converge vers son unique vecteur stationnaire* $\boldsymbol{v}$ *:* $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{A}\,\boldsymbol{v_0} = \boldsymbol{v}$ *;*

— *les puissances de la matrice de transition* A *convergent vers une matrice* $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{A}^n$ *dont toutes les colonnes égalent le vecteur stationnaire* $\boldsymbol{v}$*.*

Remarque : la condition A^k ne possède que des termes strictement positifs signifie que l'on peut passer, en k étapes, de n'importe quel sommet du graphe à n'importe quel autre.

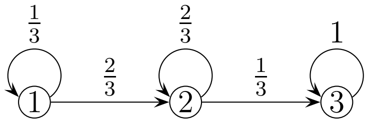
Exemple 7.7 La matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ de l'exemple 7.4 est bien régulière, vu que $\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{13}{24} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{13}{24} \end{pmatrix}$ ne possède que des coefficients strictement positifs.

C'est pourquoi $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{3}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{4}{11} & \frac{4}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{4}{11} & \frac{4}{11} & \frac{4}{11} \end{pmatrix}$ possède des colonnes identiques au vecteur stationnaire vers lequel converge la chaîne de Markov.

7.12 Vérifier que les matrices de transition des exercices 7.8 et 7.9 sont régulières.

7.13 Chaque semaine, Anna achète une tablette de chocolat. Chaque tablette contient un autocollant représentant soit une étoile ☆, soit un cœur ♥, soit un trèfle à quatre feuilles ☘. Anna les collectionne pour décorer son journal intime.

On suppose les trois motifs équirépartis entre les tablettes. Le graphe suivant représente le nombre de types d'autocollants que Anna est susceptible de posséder à l'achat de chaque tablette :



1) Diagonaliser la matrice de transition A pour donner une formule pour A^n.
2) En déduire que la chaîne de Markov converge.
3) Vérifier que la matrice A n'est pas régulière.

L'exercice 7.13 a montré que le théorème de Perron-Frobenius donne une condition suffisante pour la convergence d'une chaîne de Markov, mais non nécessaire : il existe des chaînes de Markov qui convergent sans que leur matrice de transition soit régulière.

Comment fonctionne Google

Lorsqu'on effectue une recherche sur Internet, on obtient un très grand nombre de pages contenant les mots clés demandés. Un bon moteur de recherche se doit de classer toutes ces pages par ordre de pertinence, de façon à ce que nous trouvions la réponse à notre requête parmi les toutes premières pages affichées.

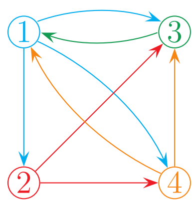
Google a connu le succès que l'on sait en parvenant à répondre très efficacement à ce problème grâce à l'algorithme nommé *PageRank*.

L'idée fondamentale de cet algorithme est d'imaginer un internaute idéal, qui ne se lasse jamais de surfer d'une page à l'autre en cliquant au hasard sur les différents liens pour passer d'une page à l'autre. Le classement des pages web est déterminé par les probabilités à long terme que cet internaute imaginaire visite chacune de ces pages.

Si l'on applique ce principe à l'exercice 7.9, on a trouvé que la probabilité de visite pour chaque page est donnée par le vecteur stationnaire :

$$\begin{pmatrix} \frac{60}{259} \\ \frac{15}{259} \\ \frac{44}{259} \\ \frac{62}{259} \\ \frac{58}{259} \\ \frac{20}{259} \end{pmatrix} \quad \text{qui donne lieu au classement} \quad \left\{ \begin{array}{lll} 1. & \frac{62}{259} & \text{page } 4 \\ 2. & \frac{60}{259} & \text{page } 1 \\ 3. & \frac{58}{259} & \text{page } 5 \\ 4. & \frac{44}{259} & \text{page } 3 \\ 5. & \frac{20}{259} & \text{page } 6 \\ 6. & \frac{15}{259} & \text{page } 2 \end{array} \right. .$$

7.14 Le graphe suivant représente quatre pages web et les liens qui permettent de naviguer d'une page à l'autre.



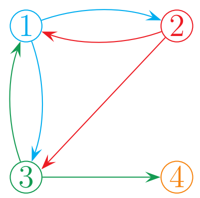
1) Quel est le classement *PageRank* de ces pages web ?

2) Les propriétaires du site de la page 3, furieux de ne pas être en tête du classement, décident de créer une page 5 qui possède un unique lien vers la page 3 et ajoutent un lien de la page 3 vers la page 5.

   Parviennent-ils ainsi à améliorer leur classement ?

L'algorithme *PageRank* ne peut toutefois s'appliquer en l'état, en raison de deux difficultés que nous allons illustrer dans les deux exemples suivants.

Exemple 7.8 Cherchons à classer les pages web suivantes :



$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Calculons le vecteur stationnaire :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0-1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0-1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1-1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_1 \to -2\,L_1 \\ L_2 \to 2\,L_2 \\ L_3 \to 2\,L_3 \\ L_4 \to 2\,L_4}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{L_3 \leftrightarrow L_1}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2\,L_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{L_3 \to L_3 - L_2}{\Longrightarrow}$$

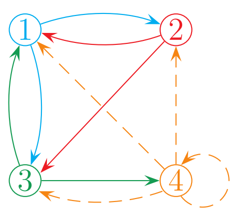
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_1 \to L_1 + 2\,L_3 \\ L_2 \to L_2 - 2\,L_3 \\ L_4 \to L_4 - L_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{L_2 \to -1/3\,L_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{L_1 \to L_1 - L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur stationnaire que l'on a trouvé attribue un score nul aux trois premières pages et un score maximal à la quatrième page. Cela signifie qu'à long terme, l'internaute idéal visiterait uniquement la quatrième page et jamais les trois premières pages.

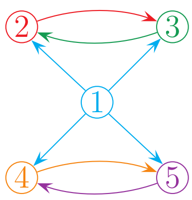
Ce résultat n'est guère surprenant. La particularité de la quatrième page est qu'elle ne contient aucun lien. Sitôt que l'on atteint la quatrième page, on est condamné à y rester, comme si l'on était tombé au fond d'un puits dont il est nous impossible de ressortir.

La stratégie pour contourner le problème des pages « puits » consiste à admettre que l'on quittera une telle page en choisissant au hasard n'importe quelle page. On va par conséquent modifier notre toile de la façon suivante :



$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Exemple 7.9 Cherchons à classer les pages web suivantes :



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminons l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0-1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0-1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0-1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 & 0-1 & 0 \end{array}\right) \xRightarrow{\substack{L_1 \to -L_1 \\ L_2 \to 4\,L_2 \\ L_3 \to 4\,L_3 \\ L_4 \to 4\,L_4 \\ L_5 \to 5\,L_5}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right) \xRightarrow{\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \\ L_4 \to L_4 - L_1 \\ L_5 \to L_5 - L_1}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right) \xRightarrow{\substack{L_2 \to -1/4\,L_2 \\ L_3 \to 1/4\,L_3 \\ L_4 \to -1/4\,L_4 \\ L_5 \to 1/4\,L_5}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xRightarrow{\substack{L_3 \to L_3 - L_2 \\ L_5 \to L_5 - L_2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \quad \beta \\ x_5 = \quad \beta \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

On a obtenu un espace propre de dimension 2. Cela pose problème, car il y a dès lors une infinité de vecteurs stationnaires et de classements possibles :

$$\text{par exemple } 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad \text{ou encore } 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Cela résultat est dû au fait qu'il y a deux sous-réseaux indépendants l'un de l'autre : d'une part les pages 2 et 3, d'autre part les pages 4 et 5. On constate qu'ils sont entièrement séparés l'un de l'autre et autonomes. C'est ce qui explique les deux vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda = 1$ que l'on a obtenus.

L'algorithme *PageRank* sous sa forme définitive va contourner cette difficulté en faisant l'hypothèse que, de temps à autre, l'internaute va cesser de suivre un lien depuis la page où il se trouve, mais va choisir aléatoirement n'importe quelle page du web. Google garde secrète la valeur exacte utilisée, mais suggère que c'est dans environ 15 % des cas que l'internaute idéal va se rendre directement vers n'importe quelle page choisie au hasard.

En appliquant ce procédé à notre exemple, voici la matrice que l'on va utiliser pour établir le classement des pages :

$$\frac{85}{100}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{15}{100}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}03 \\ 0{,}2425 & 0{,}03 & 0{,}88 & 0{,}03 & 0{,}03 \\ 0{,}2425 & 0{,}88 & 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}03 \\ 0{,}2425 & 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}88 \\ 0{,}2425 & 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}88 & 0{,}03 \end{pmatrix}$$

On obtient une matrice dont tous les coefficients sont strictement positifs, c'est-à-dire une matrice régulière. Le théorème de Perron-Frobenius garantit ainsi la convergence de la chaîne de Markov vers son unique vecteur stationnaire.

Google doit donc son succès et sa fortune au calcul d'un vecteur propre dont le nombre de composantes égale le nombre de pages web. Ce nombre est évidemment gigantesque et explique l'origine du nom de la compagnie : on appelle **gogol** le nombre 10^{100} que l'on écrit $1\underbrace{000\,000\ \ldots\ldots\ldots\ 000}_{100 \text{ zéros}}$.

Vu l'ampleur des calculs, le vecteur stationnaire ne va pas être déterminé en résolvant un immense système d'équations, mais simplement par itérations successives jusqu'à l'obtention d'une approximation suffisante pour établir le classement *PageRank*.

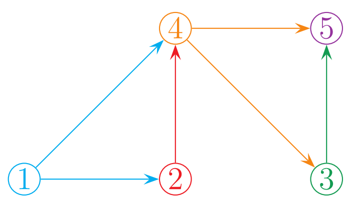
En supposant au départ que toutes les pages web sont équiprobables, voici comment établir le classement *PageRank* de notre exemple :

$$\boldsymbol{v_1} = \mathrm{A}\,\boldsymbol{v_0} = \begin{pmatrix} 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}03 \\ 0{,}2425 & 0{,}03 & 0{,}88 & 0{,}03 & 0{,}03 \\ 0{,}2425 & 0{,}88 & 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}03 \\ 0{,}2425 & 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}88 \\ 0{,}2425 & 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}88 & 0{,}03 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}2 \\ 0{,}2 \\ 0{,}2 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}03 \\ 0{,}2425 \\ 0{,}2425 \\ 0{,}2425 \\ 0{,}2425 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v_2} = \mathrm{A}\,\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}03 \\ 0{,}2425 & 0{,}03 & 0{,}88 & 0{,}03 & 0{,}03 \\ 0{,}2425 & 0{,}88 & 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}03 \\ 0{,}2425 & 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}88 \\ 0{,}2425 & 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}88 & 0{,}03 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}03 \\ 0{,}2425 \\ 0{,}2425 \\ 0{,}2425 \\ 0{,}2425 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}03 \\ 0{,}2425 \\ 0{,}2425 \\ 0{,}2425 \\ 0{,}2425 \end{pmatrix}$$

Deux itérations ont ici suffi pour établir notre approximation du vecteur stationnaire. Sans surprise, la page 1 arrive tout en fin de classement, tandis que les quatre autres pages se partagent la tête du classement.

7.15 Le graphe suivant représente cinq pages web et les liens qui permettent de naviguer d'une page à l'autre.



1) Quelle matrice est utilisée par la forme définitive de *PageRank* ?

2) En prenant pour vecteur initial celui correspondant à une probabilité identique de visiter chaque page, déterminer le score *PageRank* de chaque page avec une précision de deux décimales.
Combien d'itérations sont nécessaires ?

Réponses

7.1 $\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

7.2 1) oui 2) non : la somme des colonnes n'est pas égale à 1
3) oui 4) non : les coefficients ne peuvent pas être négatifs

7.3 ensoleillé : 45,64 % nuageux : 12,64 % pluvieux : 41,72 %

7.4 1) $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{v_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 2) $\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{11}{36} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{11}{36} \\ \frac{1}{12} \end{pmatrix}$

7.5 page 1 : $\frac{1}{6}$ page 2 : $\frac{5}{18}$ page 3 : $\frac{5}{18}$ page 4 : $\frac{5}{18}$

7.6 $$\lim_{n\to+\infty}\begin{pmatrix}\frac{95}{100} & \frac{3}{100}\\ \frac{5}{100} & \frac{97}{100}\end{pmatrix}^n = \lim_{n\to+\infty}\begin{pmatrix}\frac{3}{8}+\frac{5}{8}\left(\frac{23}{25}\right)^n & \frac{3}{8}-\frac{3}{8}\left(\frac{23}{25}\right)^n\\ \frac{5}{8}-\frac{5}{8}\left(\frac{23}{25}\right)^n & \frac{5}{8}+\frac{3}{8}\left(\frac{23}{25}\right)^n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{8} & \frac{3}{8}\\ \frac{5}{8} & \frac{5}{8}\end{pmatrix}$$

population urbaine : 37,5 % population rurale : 62,5 %

7.7 $$\lim_{n\to+\infty}\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n & \frac{1}{5}-\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n & \frac{1}{5}-\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\\ \frac{2}{5}-\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n & \frac{2}{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n+\frac{1}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^n & \frac{2}{5}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n+\frac{1}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\\ \frac{2}{5}-\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n & \frac{2}{5}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n+\frac{1}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^n & \frac{2}{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n+\frac{1}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}$$ soleil : $\frac{1}{5}$, pluie : $\frac{2}{5}$, neige : $\frac{2}{5}$

7.8 $$A = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0\end{pmatrix}$$ vecteur stationnaire : $$\begin{pmatrix}\frac{1}{7}\\ \frac{3}{14}\\ \frac{2}{7}\\ \frac{3}{14}\\ \frac{1}{7}\end{pmatrix}$$

7.9 $$A = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$ a pour vecteur stationnaire $$\begin{pmatrix}\frac{60}{259}\\ \frac{15}{259}\\ \frac{44}{259}\\ \frac{62}{259}\\ \frac{58}{259}\\ \frac{20}{259}\end{pmatrix}$$

7.10 $$A^n = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ \frac{1}{2} & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & 0\end{pmatrix}$$ si n est impair et $$A^n = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$ si n est pair

7.11 $$A^n = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$$ si n est impair et $$A^n = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$ si n est pair

vecteur stationnaire : $$\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

7.12 1) $A^2 = \begin{pmatrix} \frac{7}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{7}{36} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{13}{36} & \frac{5}{24} & \frac{1}{12} & \frac{7}{24} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{18} & \frac{5}{12} & \frac{5}{18} & \frac{1}{6} \\ \frac{7}{24} & \frac{1}{12} & \frac{5}{24} & \frac{13}{36} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{7}{36} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{7}{24} \end{pmatrix}$ 2) $A^4 = \begin{pmatrix} \frac{11}{64} & \frac{5}{24} & \frac{3}{16} & \frac{17}{48} & \frac{25}{96} & \frac{1}{16} \\ \frac{19}{192} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \frac{1}{64} & \frac{5}{64} & \frac{1}{16} \\ \frac{41}{192} & \frac{3}{16} & \frac{3}{32} & \frac{31}{192} & \frac{43}{192} & \frac{1}{16} \\ \frac{23}{96} & \frac{37}{144} & \frac{31}{96} & \frac{11}{64} & \frac{35}{192} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{6} & \frac{7}{36} & \frac{7}{24} & \frac{25}{96} & \frac{17}{96} & \frac{7}{24} \\ \frac{7}{64} & \frac{13}{144} & \frac{7}{96} & \frac{7}{192} & \frac{5}{64} & \frac{5}{48} \end{pmatrix}$

7.13 1) $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 0 \\ 2\left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n & \left(\frac{2}{3}\right)^n & 0 \\ 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n & 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n & 1 \end{pmatrix}$$

2) $\lim\limits_{n \to +\infty} \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 0 \\ 2\left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n & \left(\frac{2}{3}\right)^n & 0 \\ 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n & 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On se doute bien qu'à long terme, Anna finira par posséder les trois motifs.

3) $A^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 0 \\ 2\left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n & \left(\frac{2}{3}\right)^n & 0 \\ 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n & 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n & 1 \end{pmatrix}$ a toujours des termes nuls.

7.14 1) Les scores sont : $\begin{pmatrix} \frac{12}{31} \\ \frac{4}{31} \\ \frac{9}{31} \\ \frac{6}{31} \end{pmatrix}$, d'où le classement : $\left\{ \begin{array}{ll} 1. & \text{page 1} \\ 2. & \text{page 3} \\ 3. & \text{page 4} \\ 4. & \text{page 2} \end{array} \right.$

2) Les scores deviennent : $\begin{pmatrix} \frac{12}{49} \\ \frac{4}{49} \\ \frac{18}{49} \\ \frac{6}{49} \\ \frac{9}{49} \end{pmatrix}$, d'où le classement : $\left\{ \begin{array}{ll} 1. & \text{page 3} \\ 2. & \text{page 1} \\ 3. & \text{page 5} \\ 4. & \text{page 4} \\ 5. & \text{page 2} \end{array} \right.$

7.15 1) $\frac{85}{100} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} + \frac{15}{100} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}2 \\ 0{,}455 & 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}2 \\ 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}455 & 0{,}2 \\ 0{,}455 & 0{,}88 & 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}2 \\ 0{,}03 & 0{,}03 & 0{,}88 & 0{,}455 & 0{,}2 \end{pmatrix}$

2) Après 5 itérations, on obtient le classement $\left\{ \begin{array}{lll} 1. & 0{,}35 & \text{page 5} \\ 2. & 0{,}24 & \text{page 4} \\ 3. & 0{,}19 & \text{page 3} \\ 4. & 0{,}13 & \text{page 2} \\ 5. & 0{,}09 & \text{page 1} \end{array} \right.$.