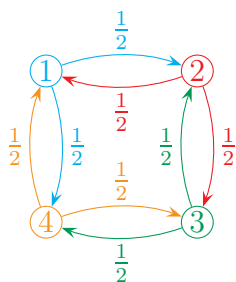


7.11



$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons quelques puissances de la matrice A :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = A$$

Comme $A^3 = A$, on conclut que les puissances de la matrice A ne donnent que deux résultats possibles :

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ si } n \text{ est impair} \quad \text{et} \quad A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ si } n \text{ est pair}$$

Cette chaîne de Markov va donc constamment osciller entre deux états et ne converge pas.

Calculons le vecteur stationnaire de cette chaîne de Markov :

$$\begin{pmatrix} 0-1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0-1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0-1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \rightarrow 2L_1 \\ L_2 \rightarrow 2L_2 \\ L_3 \rightarrow 2L_3 \\ L_4 \rightarrow 4L_4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftrightarrow L_1 \\ L_2 \leftrightarrow 1/2 L_4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \rightarrow L_2 + 2L_1 \\ L_4 \rightarrow L_4 - L_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_3 \rightarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \rightarrow L_4 + 3L_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_3 \rightarrow -1/2 L_3 \\ L_4 \rightarrow 1/2 L_4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xRightarrow[\substack{L_4 \rightarrow L_4 - L_3}]{\substack{L_1 \rightarrow L_1 - L_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xRightarrow{L_1 \rightarrow L_1 + 2L_2} \\
& \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Comme $1 + 1 + 1 + 1 = 4$, on obtient comme vecteur stationnaire :

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

On constate ainsi que cette chaîne de Markov possède un vecteur stationnaire, sans pour autant converger vers celui-ci.