7.12 Il s'agit de calculer quelques puissances de la matrice de transition, jusqu'à ce que tous les coefficients soient strictement positifs.

1) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{7}{36} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{13}{36} & \frac{5}{24} & \frac{1}{12} & \frac{7}{24} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{18} & \frac{5}{12} & \frac{5}{18} & \frac{1}{6} \\ \frac{7}{24} & \frac{1}{12} & \frac{5}{24} & \frac{13}{36} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{7}{36} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{7}{24} \end{pmatrix}$$

Puisque tous les coefficients de A^2 sont strictement positifs, la matrice A est bien régulière.

Cela signifie qu'en deux déplacements, la souris peut se rendre de n'importe quelle pièce du labyrinthe à n'importe quelle autre pièce.

2) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{11}{24} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{12} & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{11}{24} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{12} & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{48} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{5}{16} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{32} & \frac{1}{12} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{19}{96} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{11}{96} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{11}{48} & \frac{1}{8} \\ \frac{11}{48} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{7}{24} & \frac{7}{24} & 0 \\ \frac{1}{32} & \frac{1}{12} & \frac{1}{8} & \frac{5}{48} & \frac{1}{24} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}^4 = \begin{pmatrix} \frac{19}{48} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{5}{16} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{32} & \frac{1}{12} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{19}{96} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{11}{96} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{11}{48} & \frac{1}{8} \\ \frac{11}{48} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{7}{24} & \frac{7}{24} & 0 \\ \frac{1}{32} & \frac{1}{12} & \frac{1}{8} & \frac{5}{48} & \frac{1}{24} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{64} & \frac{5}{24} & \frac{3}{16} & \frac{17}{48} & \frac{25}{96} & \frac{1}{16} \\ \frac{19}{192} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \frac{1}{64} & \frac{5}{64} & \frac{1}{16} \\ \frac{41}{192} & \frac{3}{16} & \frac{3}{32} & \frac{31}{192} & \frac{43}{192} & \frac{1}{16} \\ \frac{23}{96} & \frac{37}{144} & \frac{31}{96} & \frac{11}{64} & \frac{35}{192} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{6} & \frac{7}{36} & \frac{7}{24} & \frac{25}{96} & \frac{17}{96} & \frac{7}{24} \\ \frac{7}{64} & \frac{13}{144} & \frac{7}{96} & \frac{7}{192} & \frac{5}{64} & \frac{5}{48} \end{pmatrix}$$

Puisque tous les coefficients de A^4 sont strictement positifs, la matrice A est bien régulière.

Cela signifie qu'en quatre clics, l'internaute peut se rendre de n'importe quelle page à n'importe quelle autre.