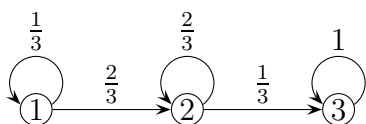


7.13



$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

1) Commençons par calculer les valeurs propres :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} - \lambda & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} - \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{3} - \lambda\right) \left(\frac{2}{3} - \lambda\right) (1 - \lambda)$$

Il s'agit en effet du déterminant d'une matrice triangulaire.

Déterminons l'espace propre $E_{\frac{1}{3}}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} - \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} - \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 - \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \rightarrow 3L_2 \\ L_3 \rightarrow 3L_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \rightarrow \text{en dernier} \\ L_2 \rightarrow L_2 - L_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow \frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = -2\alpha \\ z = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Déterminons l'espace propre $E_{\frac{2}{3}}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} - \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} - \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 - \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \rightarrow -3L_1 \\ L_2 \rightarrow 3L_2 \\ L_3 \rightarrow 3L_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Déterminons l'espace propre E_1 :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} - 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} - 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 - 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \rightarrow -3L_1 \\ L_2 \rightarrow 3L_2 \\ L_3 \rightarrow 3L_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow -L_2 + L_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow \frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculons l'inverse de la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \rightarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_3 \rightarrow L_3 - L_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} L_2 \rightarrow -L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 + L_2 \\ \implies \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Calculons A^n :

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\frac{1}{3})^n & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{2}{3})^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\frac{1}{3})^n & 0 & 0 \\ -2(\frac{1}{3})^n & -(\frac{2}{3})^n & 0 \\ (\frac{1}{3})^n & (\frac{2}{3})^n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{1}{3})^n & 0 & 0 \\ 2(\frac{2}{3})^n - 2(\frac{1}{3})^n & (\frac{2}{3})^n & 0 \\ 1 - 2(\frac{2}{3})^n + (\frac{1}{3})^n & 1 - (\frac{2}{3})^n & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} (\frac{1}{3})^n & 0 & 0 \\ 2(\frac{2}{3})^n - 2(\frac{1}{3})^n & (\frac{2}{3})^n & 0 \\ 1 - 2(\frac{2}{3})^n + (\frac{1}{3})^n & 1 - (\frac{2}{3})^n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme toutes les colonnes obtenues sont identiques, on conclut que la chaîne de Markov converge, quelle que soit la situation initiale, vers le vecteur stationnaire $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Cela signifie qu'à long terme, Anna finira par posséder les trois motifs.

$$3) A^n = \begin{pmatrix} (\frac{1}{3})^n & 0 & 0 \\ 2(\frac{2}{3})^n - 2(\frac{1}{3})^n & (\frac{2}{3})^n & 0 \\ 1 - 2(\frac{2}{3})^n + (\frac{1}{3})^n & 1 - (\frac{2}{3})^n & 1 \end{pmatrix}$$

montre que, quelle que soit la puissance $n \in \mathbb{N}$, la matrice A^n possède toujours des coefficients nuls : c'est pourquoi la matrice A n'est pas régulière.