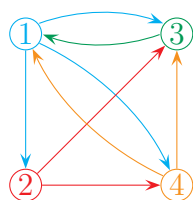


7.14

1)



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifions que la matrice A est régulière :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{3}{8} & \frac{5}{12} & \frac{11}{24} \\ \frac{5}{36} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{11}{36} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{7}{24} \\ \frac{2}{9} & \frac{5}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Tous les coefficients de A^4 sont bien strictement positifs.

En vertu du théorème de Perron-Frobenius, la chaîne de Markov va converger vers son vecteur stationnaire, qu'il nous faut déterminer :

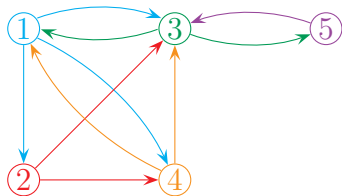
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \rightarrow 2L_1 \\ L_2 \rightarrow 3L_2 \\ L_3 \rightarrow 6L_3 \\ L_4 \rightarrow 6L_4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -6 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -6 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{L_2 \leftrightarrow 1/3 L_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + 2L_2, L_4 \rightarrow L_4 - 3L_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - L_3, L_4 \rightarrow L_4 + 3L_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{L_1 \rightarrow L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{L}_3 \rightarrow -1/2 \text{L}_3]{\text{L}_2 \rightarrow 1/3 \text{L}_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x_1 = 2\alpha \\ x_2 = \frac{2}{3}\alpha \\ x_3 = \frac{3}{2}\alpha \\ x_4 = \alpha \end{cases} = \frac{1}{6}\alpha \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}$$

Comme $12 + 4 + 9 + 6 = 31$, on trouve que :

$$\text{les scores sont : } \begin{pmatrix} \frac{12}{31} \\ \frac{4}{31} \\ \frac{9}{31} \\ \frac{6}{31} \end{pmatrix}, \text{ d'où le classement : } \begin{cases} 1. & \text{page 1} \\ 2. & \text{page 3} \\ 3. & \text{page 4} \\ 4. & \text{page 2} \end{cases}$$

2) 

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifions que la matrice A est régulière :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \\ \frac{13}{36} & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{8} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \\ \frac{13}{36} & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{8} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{72} & \frac{7}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & \frac{5}{36} & \frac{1}{18} & 0 \\ \frac{13}{36} & \frac{1}{3} & \frac{37}{72} & \frac{19}{72} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{36} & \frac{1}{8} & \frac{5}{36} & \frac{7}{72} & \frac{1}{12} \\ \frac{13}{72} & \frac{5}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} \frac{17}{72} & \frac{7}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & \frac{5}{36} & \frac{1}{18} & 0 \\ \frac{13}{36} & \frac{1}{3} & \frac{37}{72} & \frac{19}{72} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{36} & \frac{1}{8} & \frac{5}{36} & \frac{7}{72} & \frac{1}{12} \\ \frac{13}{72} & \frac{5}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{11}{48} & \frac{47}{144} & \frac{13}{72} & \frac{1}{8} \\ \frac{17}{216} & \frac{7}{72} & \frac{1}{24} & \frac{1}{9} & \frac{5}{36} \\ \frac{10}{27} & \frac{7}{18} & \frac{19}{72} & \frac{7}{16} & \frac{37}{72} \\ \frac{13}{108} & \frac{17}{144} & \frac{1}{9} & \frac{5}{36} & \frac{5}{36} \\ \frac{13}{72} & \frac{1}{6} & \frac{37}{144} & \frac{19}{144} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

Tous les coefficients de A^5 sont bien strictement positifs.

En vertu du théorème de Perron-Frobenius, la chaîne de Markov va converger vers son vecteur stationnaire, qu'il nous faut déterminer :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{L_1 \rightarrow 2L_1 \\ L_2 \rightarrow 3L_2 \\ L_3 \rightarrow 6L_3 \\ L_4 \rightarrow 6L_4 \\ L_5 \rightarrow 2L_6}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -6 & 3 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -6 & 3 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \rightarrow L_4 - 2L_1}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -6 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{L_2 \leftrightarrow \frac{1}{3}L_4 \\ L_3 \rightarrow \frac{1}{3}L_3}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{L_3 \rightarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \rightarrow L_4 + 2L_3}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{L_3 \leftrightarrow L_5} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{L_4 \rightarrow L_4 - L_3 \\ L_5 \rightarrow L_5 + 2L_3}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{L_2 \rightarrow 3L_2 - 2L_4 \\ L_5 \rightarrow L_5 + L_4}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{L_1 \rightarrow 3L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{L_1 \rightarrow \frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \rightarrow \frac{1}{9}L_2 \\ L_4 \rightarrow -\frac{1}{3}L_4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{3}\alpha \\ x_2 = \frac{4}{9}\alpha \\ x_3 = 2\alpha = \frac{1}{9}\alpha \\ x_4 = \frac{2}{3}\alpha \\ x_5 = \alpha \end{cases} \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 18 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}$$

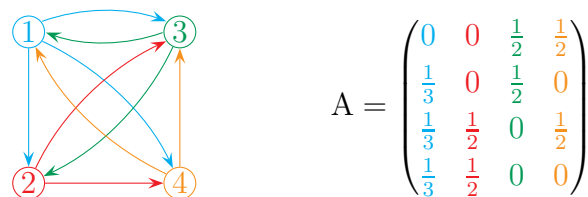
Puisque $12 + 4 + 18 + 6 + 9 = 49$, on a obtenu :

$$\text{vecteur stationnaire } \begin{pmatrix} \frac{12}{49} \\ \frac{4}{49} \\ \frac{18}{49} \\ \frac{6}{49} \\ \frac{9}{49} \end{pmatrix}, \text{ d'où le classement : } \begin{cases} 1. \text{ page 3} \\ 2. \text{ page 1} \\ 3. \text{ page 5} \\ 4. \text{ page 4} \\ 5. \text{ page 2} \end{cases}$$

On remarque que les propriétaires de la page 3 ont atteint leur objectif.

S'ils ont amélioré leur classement, c'est surtout parce qu'au lieu de n'avoir qu'un seul lien vers la page 1, ils ont ajouté un deuxième lien vers une autre page. De la sorte, ils divisent par deux l'importance qu'ils accordent à la première page, ce qui a pour effet de baisser le classement de celle-ci, à leur avantage.

Une stratégie plus économique aurait été, au lieu de créer une nouvelle page 5, d'ajouter simplement un lien de leur page vers la dernière page du classement, la page 2 :



On obtient en effet dans ce cas :

$$\text{vecteur stationnaire } \begin{pmatrix} \frac{15}{59} \\ \frac{14}{59} \\ \frac{18}{59} \\ \frac{12}{59} \end{pmatrix}, \text{ d'où le classement : } \begin{cases} 1. \text{ page 3} \\ 2. \text{ page 1} \\ 3. \text{ page 2} \\ 4. \text{ page 4} \end{cases}$$