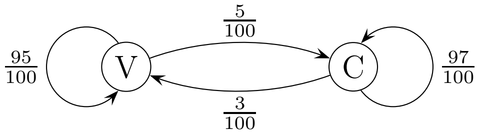
7.6



Matrice de transition : $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{95}{100} & \frac{3}{100} \\ \frac{5}{100} & \frac{97}{100} \end{pmatrix}$

Calcul des valeurs propres :

$$\det(\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} \frac{95}{100} - \lambda & \frac{3}{100} \\ \frac{5}{100} & \frac{97}{100} - \lambda \end{vmatrix} \overset{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2}{=} \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 - \lambda \\ \frac{5}{100} & \frac{97}{100} - \lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{5}{100} & \frac{97}{100} - \lambda \end{vmatrix} \overset{\mathrm{C}_2 \to \mathrm{C}_2 - \mathrm{C}_1}{=} (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{5}{100} & \frac{23}{25} - \lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1 - \lambda)\left(\tfrac{23}{25} - \lambda\right)$$

On obtient deux valeurs propres : $\lambda = 1$ et $\lambda = \frac{23}{25}$.

Déterminons l'espace propre E_1 :

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{95}{100} - 1 & \frac{3}{100} & 0 \\ \frac{5}{100} & \frac{97}{100} - 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to -100\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \to 100\,\mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -3 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to 1/5\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\begin{cases} x = \frac{3}{5}\,\alpha \\ y = \alpha \end{cases} = \frac{1}{5}\,\alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}$$

Déterminons l'espace propre $\mathrm{E}_{\frac{23}{25}}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{95}{100} - \frac{23}{25} & \frac{3}{100} & 0 \\ \frac{5}{100} & \frac{97}{100} - \frac{23}{25} & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to 100\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \to 100\,\mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to 1/3\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \to 3\,\mathrm{L}_2 - 5\,\mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\begin{cases} x = -\alpha \\ y = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}$$

Calculons l'inverse de la matrice de passage $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_2 \to 3\,\mathrm{L}_2 - 5\,\mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 3 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_1 \to 8\,\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 24 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 8 & -5 & 3 \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_1 \to 1/24\,\mathrm{L}_1 \mathrm{L}_2 \to 1/8\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 8 & -\frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{array}\right)$$

Vu que la matrice A est diagonalisable, on calcule A^n facilement :

$$\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{23}{25}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -\left(\frac{23}{25}\right)^n \\ 5 & \left(\frac{23}{25}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{8} + \frac{5}{8}\left(\frac{23}{25}\right)^n & \frac{3}{8} - \frac{3}{8}\left(\frac{23}{25}\right)^n \\ \frac{5}{8} - \frac{5}{8}\left(\frac{23}{25}\right)^n & \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\left(\frac{23}{25}\right)^n \end{pmatrix}$$

Pour une prédiction à long terme, on effectue le passage à la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{A}^n = \lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} \frac{3}{8}+\frac{5}{8}\left(\frac{23}{25}\right)^n & \frac{3}{8}-\frac{3}{8}\left(\frac{23}{25}\right)^n \\ \frac{5}{8}-\frac{5}{8}\left(\frac{23}{25}\right)^n & \frac{5}{8}+\frac{3}{8}\left(\frac{23}{25}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

On a trouvé les proportions de chaque type de population :
population urbaine : $\frac{3}{8} = 37{,}5\,\%$
population rurale : $\frac{5}{8} = 62{,}5\,\%$

Cette répartition est la même quelle que soit la situation initiale, car les colonnes de la matrice $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$ sont identiques.