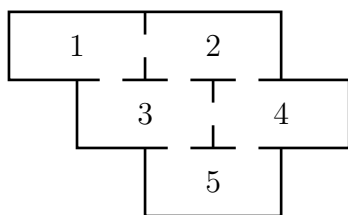


7.8



$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminons l'espace propre E_1 :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \rightarrow 12L_1 \\ L_2 \rightarrow 12L_2 \\ L_3 \rightarrow 6L_3 \\ L_4 \rightarrow 12L_4 \\ L_5 \rightarrow 12L_5 \\ \Rightarrow \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -12 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -12 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -6 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -12 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & -12 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & -12 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ -12 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -12 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & -12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 + 4L_1 \end{array}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -16 & 15 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 12 & -21 & 8 & 12 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -12 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & -12 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftrightarrow L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -12 & 6 & 0 \\ 0 & 12 & -21 & 8 & 12 & 0 \\ 0 & -16 & 15 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & -12 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} L_3 \rightarrow L_3 - 3L_2 \\ L_4 \rightarrow L_4 + 4L_2 \end{array}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -12 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -30 & 44 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 27 & -48 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & -12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} L_5 \leftrightarrow -1/2 L_3 \\ L_4 \rightarrow 1/3 L_4 \end{array}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -12 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -16 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & -22 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} L_4 \rightarrow L_4 - 3L_3 \\ L_5 \rightarrow L_5 - 5L_3 \end{array}}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -12 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -28 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -42 & 63 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} L_4 \rightarrow -1/14 L_4 \\ L_5 \rightarrow -1/21 L_5 \end{array}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -12 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 - L_4 \\ L_2 \rightarrow L_2 + 6L_4 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 2L_4 \\ L_5 \rightarrow L_5 - L_4 \end{array}}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 + 2L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 - L_3 \end{array}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow 2L_1 - L_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xRightarrow{\begin{array}{l} L_1 \rightarrow 1/6 L_1 \\ L_2 \rightarrow 1/4 L_2 \\ L_3 \rightarrow 1/3 L_3 \\ L_4 \rightarrow 1/2 L_4 \end{array}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \frac{3}{2} \alpha \\ x_3 = 2 \alpha = \frac{1}{2} \alpha \\ x_4 = \frac{3}{2} \alpha \\ x_5 = \alpha \end{cases} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Comme $2 + 3 + 4 + 3 + 2 = 14$, on trouve comme vecteur stationnaire :

$$\frac{1}{14} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{3}{14} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{3}{14} \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

Pour autant que la chaîne de Markov converge bien, la souris passe le $\frac{1}{7}$ de son temps dans la pièce 1, les $\frac{3}{14}$ dans la pièce 2, les $\frac{2}{7}$ dans la pièce 3, les $\frac{3}{14}$ dans la pièce 4 et le $\frac{1}{7}$ dans la pièce 5.

L'exercice 7.12 justifiera la convergence de cette chaîne de Markov.