



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminons l'espace propre E_1 :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \rightarrow 2L_1 \\ L_2 \rightarrow 4L_2 \\ L_3 \rightarrow 4L_3 \\ L_4 \rightarrow 12L_4 \\ L_5 \rightarrow 6L_5 \\ L_6 \rightarrow 12L_6 \\ \Rightarrow \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & -12 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & -12 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \rightarrow L_4 - 3L_1 \\ L_6 \rightarrow L_6 - 3L_1 \\ \Rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 6 & -12 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow \frac{1}{2}L_3 \\ L_4 \rightarrow \frac{1}{2}L_4 \\ L_6 \rightarrow \frac{1}{4}L_6 \\ \Rightarrow \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & -6 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_3 \rightarrow L_3 + 4L_2 \\ L_4 \rightarrow L_4 - 4L_2 \\ L_5 \rightarrow L_5 - L_2 \\ L_6 \rightarrow L_6 - 2L_2 \\ \Rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & -6 & -4 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} L_4 \rightarrow 8L_4 + 11L_3 \\ L_5 \rightarrow 8L_5 + 5L_3 \\ L_6 \rightarrow 2L_6 + L_3 \\ \Rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -37 & 23 & 48 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 29 & -31 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_6 \leftrightarrow L_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 5 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 29 & -31 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -37 & 23 & 48 & | & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{L_5 \rightarrow L_5 - 29L_4 \\ L_6 \rightarrow L_6 + 37L_4}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 5 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -60 & | & 174 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 60 & -174 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 5 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -29 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{L_5 \rightarrow -1/6 L_5 \\ L_6 \rightarrow L_6 + L_5}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 5 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -29 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{L_2 \rightarrow 10L_2 - L_5 \\ L_3 \rightarrow 2L_3 - L_5 \\ L_4 \rightarrow 10L_4 - L_5}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 20 & -20 & 0 & 0 & 29 & | & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 2 & 0 & 29 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & -31 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -29 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{L_3 \rightarrow 5L_3 - L_4} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 20 & -20 & 0 & 0 & 29 & | & 0 \\ 0 & 0 & -80 & 0 & 0 & 176 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & -31 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -29 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 20 & -20 & 0 & 0 & 29 & | & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & -11 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & -31 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -29 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{L_3 \rightarrow -1/16 L_3} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 20 & -20 & 0 & 0 & 29 & | & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & -11 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & -31 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -29 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + 4L_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & -15 & | & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & -11 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & -31 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -29 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{L_2 \rightarrow 1/4 L_2} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & -11 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & -31 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -29 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{L_1 \rightarrow L_1 + L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & | & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & -11 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & -31 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -29 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\substack{L_2 \rightarrow 1/4 L_2 \\ L_3 \rightarrow 1/5 L_3 \\ L_4 \rightarrow 1/10 L_4 \\ L_5 \rightarrow 1/10 L_5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3/4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -11/5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -31/10 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -29/10 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3\alpha \\ x_2 = \frac{3}{4}\alpha \\ x_3 = \frac{11}{5}\alpha \\ x_4 = \frac{31}{10}\alpha \\ x_5 = \frac{29}{10}\alpha \\ x_6 = \alpha \end{cases} = \frac{1}{20}\alpha \begin{pmatrix} 60 \\ 15 \\ 44 \\ 62 \\ 58 \\ 20 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}$$

Comme $60 + 15 + 44 + 62 + 58 + 20 = 259$, on a comme vecteur stationnaire :

$$\frac{1}{259} \begin{pmatrix} 60 \\ 15 \\ 44 \\ 62 \\ 58 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{60}{259} \\ \frac{15}{259} \\ \frac{44}{259} \\ \frac{62}{259} \\ \frac{58}{259} \\ \frac{20}{259} \end{pmatrix}.$$

Pour autant que la chaîne de Markov converge bien, l'internaute passe les $60/259$ de son temps sur la page [1](#), les $15/259$ sur la page [2](#), les $44/259$ sur la page [3](#), les $62/259$ sur la page [4](#), les $58/259$ sur la page [5](#) et les $20/259$ sur la page 6.

L'exercice 7.12 justifiera la convergence de cette chaîne de Markov.