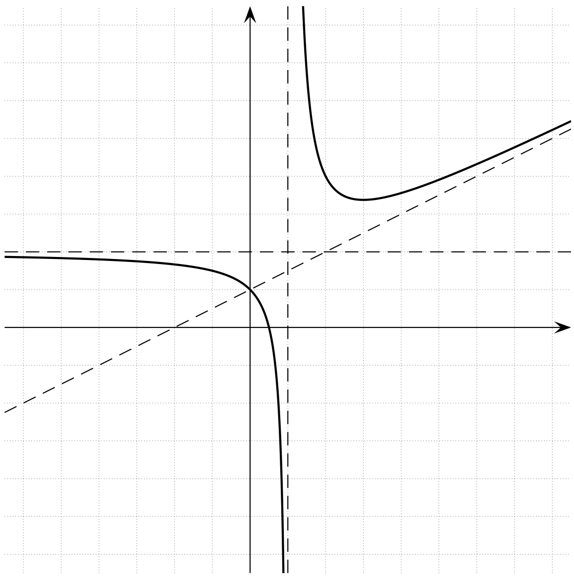
4 Asymptotes

Avant de définir formellement les différents types d'asymptotes, découvrons-les à partir du graphe d'une fonction f.



Graphiquement, une **asymptote** d'une fonction est une droite de laquelle se rapproche indéfiniment son graphe.

Dans cet exemple, on constate que :

1) la droite $x = 1$ est une asymptote verticale ;
2) la droite $y = 2$ est une asymptote horizontale (à gauche) ;
3) la droite $y = \frac{1}{2}\,x + 1$ est une asymptote oblique (à droite).

Asymptote verticale

La droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** de la fonction f si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \infty$.

4.1 Déterminer, si elles existent, les équations des asymptotes verticales des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \dfrac{3\,x}{x^2 - 6\,x + 9}$
2) $f(x) = \dfrac{-7\,x^2}{\sqrt{x+3}}$
3) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 + 4\,x + 3}$
4) $f(x) = \dfrac{-x}{x^3 + x^2 - 5\,x + 3}$
5) $f(x) = \left(\dfrac{4\,x}{x^3 - 3\,x^2 + 2\,x}\right)^2$
6) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x^3 + 3\,x - 4}$

Asymptote horizontale

La droite d'équation $y = h$ est une **asymptote horizontale**, respectivement à gauche ou à droite, si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = h$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = h$.

4.2 Déterminer, si elles existent, les équations des asymptotes horizontales des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 7 - \dfrac{3}{x+1}$

2) $f(x) = \dfrac{3\,x^2 - 1}{5\,x^2 + 4\,x + 1}$

3) $f(x) = \dfrac{4\,x^3}{7\,x^2 + 1}$

4) $f(x) = \dfrac{4\,x + 1}{\sqrt{x^2 + 9}}$

5) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2} - 3$

6) $f(x) = 5 - \dfrac{\sqrt{4\,x^2 + 1}}{x}$

Asymptote oblique

La droite d'équation $y = m\,x + h$ est une **asymptote oblique**, respectivement à gauche ou à droite, si $f(x) = m\,x + h + \delta(x)$ avec $\lim\limits_{x \to -\infty} \delta(x) = 0$ ou respectivement $\lim\limits_{x \to +\infty} \delta(x) = 0$.

Remarque : la division polynomiale permet d'obtenir facilement l'asymptote oblique des fonctions rationnelles.

Considérons par exemple la fonction $f(x) = \dfrac{3\,x^3 - 2\,x^2 + 8\,x - 1}{x^2 + 1}$.

$$\begin{array}{rrrr|l}
3\,x^3 & -\,2\,x^2 & +\,8\,x & -\,1 & x^2 + 1 \\ \cline{5-5}
-3\,x^3 & & -\,3\,x & & 3\,x - 2 \\ \cline{1-4}
& -\,2\,x^2 & +\,5\,x & -\,1 & \\
& 2\,x^2 & & +\,2 & \\ \cline{2-4}
& & 5\,x & +\,1 &
\end{array}$$

L'égalité fondamentale de la division

$$3\,x^3 - 2\,x^2 + 8\,x - 1 = (x^2 + 1)\,(3\,x - 2) + (5\,x + 1)$$

implique $f(x) = \dfrac{3\,x^3 - 2\,x^2 + 8\,x - 1}{x^2 + 1} = 3\,x - 2 + \underbrace{\dfrac{5\,x + 1}{x^2 + 1}}_{\delta(x)}$

Comme $\lim\limits_{x \to \infty} \delta(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5\,x + 1}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5\,x}{x^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5}{x} = 0$, la fonction f admet pour asymptote oblique la droite d'équation $y = 3\,x - 2$.

4.3 Déterminer, si elles existent, les équations des asymptotes obliques des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 5\,x - 1 + \dfrac{7}{x^2}$
2) $f(x) = \dfrac{4\,x^3 - 6\,x^2 + x - 4}{x^2}$
3) $f(x) = \dfrac{x^3 + 3\,x^2 + x + 1}{x}$
4) $f(x) = \dfrac{x^2 - x^3}{x^2 + 2}$
5) $f(x) = \dfrac{-2\,x^2 - 3\,x + 2}{x + 1}$
6) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2\,x}{(x - 1)^2}$

4.4 Prouver l'équivalence des affirmations suivantes :

1) la droite $y = m\,x + h$ est une asymptote oblique de la fonction f ;
2) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = m$ et $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \big(f(x) - m\,x\big) = h$.

4.5 Déterminer les équations des asymptotes obliques des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \sqrt{4\,x^2 + 9}$
2) $f(x) = 1 + \sqrt{3\,x^2 + 2}$
3) $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$
4) $f(x) = 2\,x - \sqrt{4\,x^2 + 2\,x + 1}$

Position du graphe d'une fonction par rapport à son asymptote horizontale ou oblique

L'égalité $f(x) = m\,x + h + \delta(x)$ implique $\delta(x) = f(x) - (m\,x + h)$.

L'étude du signe de la fonction $\delta(x)$ suffit ainsi pour connaître la position du graphe de f par rapport à l'asymptote oblique :

– si $\delta(x) > 0$, alors $f(x) > m\,x + h$: le graphe de f se situe au-dessus de l'asymptote oblique ;
– si $\delta(x) = 0$, alors $f(x) = m\,x + h$: le graphe de f coupe l'asymptote oblique ;
– si $\delta(x) < 0$, alors $f(x) < m\,x + h$: le graphe de f se situe en-dessous de l'asymptote oblique.

Une asymptote horizontale $y = h$ n'est qu'un cas particulier d'asymptote oblique avec $m = 0$; il suffit d'étudier le signe de la fonction $\delta(x) = f(x) - h$.

4.6 Déterminer toutes les asymptotes des fonctions suivantes ; étudier, s'il y a lieu, la position du graphe de f par rapport à son asymptote horizontale ou oblique.

1) $f(x) = \dfrac{9}{x^2 - 9}$
2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6\,x + 5}{x^2 - 3\,x - 10}$
3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$
4) $f(x) = \dfrac{2\,(x + 2)^2}{(x + 1)\,(x - 3)}$

5) $f(x) = \dfrac{x^3 - 4}{x^2}$

6) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 + 1}$

7) $f(x) = \dfrac{x^2 - x^3}{x^2 + 2}$

8) $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

9) $f(x) = -1 + \dfrac{1}{x^2 + 1}$

10) $f(x) = \dfrac{x}{3} + 1 + \dfrac{2}{x - 2}$

4.7 On considère les fonctions suivantes :

$f_1(x) = -2\,x + 5 + \dfrac{1}{x+1}$

$f_2(x) = \dfrac{4\,x^2}{2\,x^2 + 1}$

$f_3(x) = \dfrac{2\,x}{x+1}$

$f_4(x) = \dfrac{1}{x-7}$

$f_5(x) = \dfrac{2\,x}{x-7}$

$f_6(x) = \dfrac{1}{(x+1)\,(x+10)}$

$f_7(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

$f_8(x) = -2\,x + 5 + \dfrac{1}{x-5}$

$f_9(x) = 1 + \dfrac{7}{x^2 - 4}$

$f_{10}(x) = 1 + \dfrac{7}{x^2 + 4}$

$f_{11}(x) = -2\,x + 5 + \dfrac{1}{x^2 + 5}$

$f_{12}(x) = \dfrac{2\,x^2}{(x+1)\,(x+10)}$

Déterminer, sans aucun calcul, parmi les fonctions proposées ci-dessus, laquelle est caractérisée par les asymptotes suivantes :

1) $x = -1$ asymptote verticale, $y = 0$ asymptote horizontale
2) $x = -10$ et $x = -1$ asymtotes verticales, $y = 2$ asymptote horizontale
3) $y = 2$ asymptote horizontale
4) $x = 7$ asymptote verticale, $y = 2$ asymptote horizontale
5) $x = -2$ et $x = 2$ asymptotes verticales, $y = 1$ asymptote horizontale
6) $x = 5$ asymptote verticale, $y = -2\,x + 5$ asymptote oblique
7) $x = -1$ asymptote verticale, $y = 2$ asymptote horizontale
8) $y = 1$ asymptote horizontale
9) $x = -1$ asymptote verticale, $y = -2\,x + 5$ asymptote oblique
10) $x = 7$ asymptote verticale, $y = 0$ asymptote horizontale
11) $y = -2\,x + 5$ asymptote oblique
12) $x = -10$ et $x = -1$ asymptotes verticales, $y = 0$ asymptote horizontale

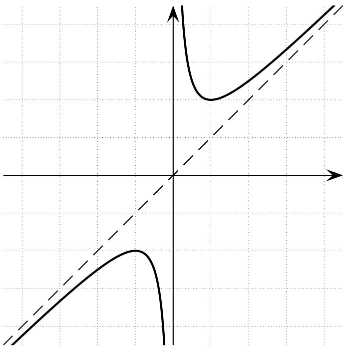
4.8 On considère les fonctions suivantes :

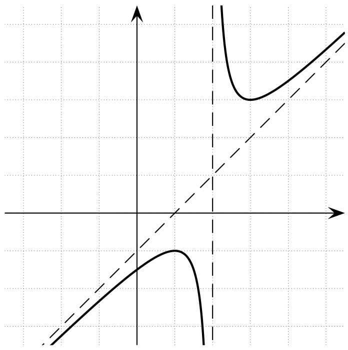
$f_1(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x-2}$ $\qquad$ $f_2(x) = -2\,x + \dfrac{1}{x+1}$

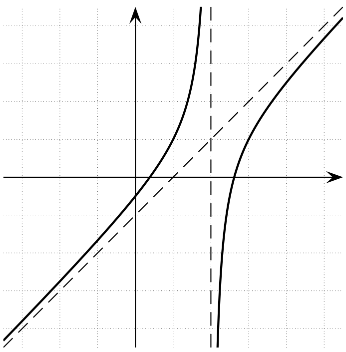
$f_3(x) = x - \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $f_4(x) = x + \dfrac{1}{x}$

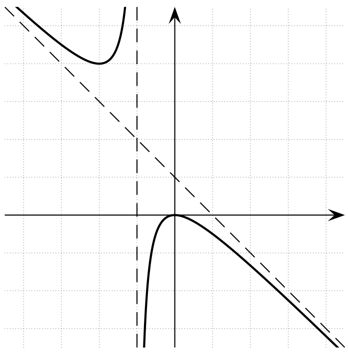
$f_5(x) = -x + 1 - \dfrac{1}{x+1}$ $\qquad$ $f_6(x) = x - 1 - \dfrac{1}{x-2}$

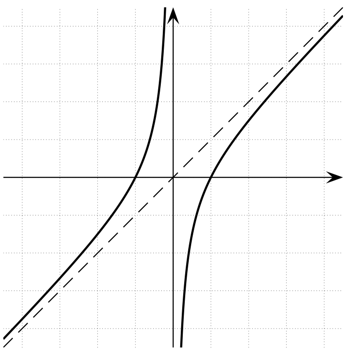
Déterminer, parmi les graphes ci-dessous, lequel correspond à chacune de ces fonctions.

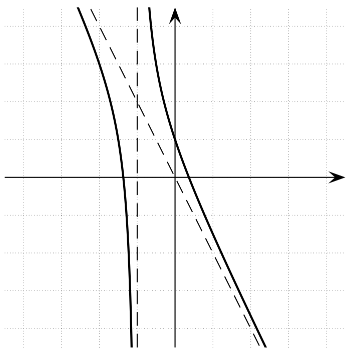
1)


2)


3)


4)


5)


6)


4.9 Déterminer les coefficients a, b, c et d de la fonction

$$f(x) = \frac{a\,x + b}{c\,x + d}$$

pour que son graphe passe par le point $\mathrm{A}(2\,;0)$ et qu'elle admette pour asymptotes les droites d'équation $x = 3$ et $y = -2$.

4.10 Déterminer les coefficients a, b, c et d de la fonction

$$f(x) = \frac{a\,x^2 + b\,x + c}{x + d}$$

pour que son graphe passe par le point $\mathrm{A}(2\,;-2)$ et qu'elle admette pour asymptotes les droites d'équation $x = -3$ et $y = -2\,x + 1$.

4.11 Déterminer les coefficients a, b, c, d et e de la fonction

$$f(x) = a\,x + b + \frac{c}{(x + d)\,(x + e)}$$

pour que son graphe passe par le point $\mathrm{A}(-5\,;20)$ et qu'elle admette pour asymptotes les droites $x = -2$, $x = 1$ et $y = 3\,x - 7$.

Réponses

4.1
1) $x = 3$
2) $x = -3$
3) $x = -1$
4) $x = -3$ et $x = 1$
5) $x = 1$ et $x = 2$
6) $x = 1$

4.2
1) $y = 7$
2) $\frac{3}{5}$
3) pas d'asymptote horizontale
4) $y = -4$ à gauche et $y = 4$ à droite
5) $y = -3$
6) $y = 7$ à gauche et $y = 3$ à droite

4.3
1) $y = 5\,x - 1$
2) $y = 4\,x - 6$
3) pas d'asymptote oblique
4) $y = -x + 1$
5) $y = -2\,x - 1$
6) $y = 1$: asymptote horizontale

4.5
1) $y = -2\,x$ à gauche et $y = 2\,x$ à droite
2) $y = -\sqrt{3}\,x + 1$ à gauche et $y = \sqrt{3}\,x + 1$ à droite
3) $y = 2\,x$ à gauche et $y = 0$ à droite
4) $y = 4\,x + \frac{1}{2}$ à gauche et $y = -\frac{1}{2}$ à droite

4.6
1) $x = -3$ et $x = 3$ asymptotes verticales, $y = 0$ asymptote horizontale avec $\delta(x) = \frac{9}{x^2-9}$
2) $x = -2$ asymptote verticale, $(5\,;\frac{4}{7})$ trou, $y = 1$ asymptote horizontale avec $\delta(x) = \frac{-3}{x+2}$
3) $x = 0$ asymptote verticale, $y = x$ asymptote oblique avec $\delta(x) = -\frac{1}{x}$

4) $x = -1$ et $x = 3$ asymptotes verticales, $y = 2$ asymptote horizontale avec $\delta(x) = \frac{2\,(6\,x+7)}{(x+1)\,(x-3)}$

5) $x = 0$ asymptote verticale, $y = x$ asymptote oblique avec $\delta(x) = -\frac{4}{x^2}$

6) $(-1\,;-\frac{2}{3})$ trou, $y = 0$ asymptote horizontale avec $\delta(x) = \frac{x-1}{x^2-x+1}$

7) $y = -x + 1$ asymptote oblique avec $\delta(x) = \frac{2\,x-2}{x^2+2}$

8) $x = 1$ asymptote verticale, $y = x+5$ asymptote oblique avec $\delta(x) = \frac{12\,x-4}{(x-1)^2}$

9) $y = -1$ asymptote horizontale avec $\delta(x) = \frac{1}{x^2+1}$

10) $x = 2$ asymptote verticale, $y = \frac{x}{3} + 1$ asymptote oblique avec $\delta(x) = \frac{2}{x-2}$

4.7

1) f_7	2) f_{12}	3) f_2	4) f_5
5) f_9	6) f_8	7) f_3	8) f_{10}
9) f_1	10) f_4	11) f_{11}	12) f_6

4.8

1) f_4	2) f_1	3) f_6
4) f_5	5) f_3	6) f_2

4.9 $a = -2$ $\quad b = 4$ $\quad c = 1$ $\quad d = -3$ $\quad f(x) = \dfrac{-2\,x + 4}{x - 3}$

4.10 $a = -2$ $\quad b = -5$ $\quad c = 8$ $\quad d = 3$ $\quad f(x) = \dfrac{-2\,x^2 - 5\,x + 8}{x + 3}$

4.11 $a = 3$ $\quad b = -7$ $\quad c = 756$ $\quad d = 2$ $\quad e = -1$ $\quad f(x) = 3\,x - 7 + \dfrac{756}{(x+2)\,(x-1)}$