4.1

1) $f(x) = \dfrac{3\,x}{x^2 - 6\,x + 9}$ n'est pas définie si $x^2 - 6\,x + 9 = (x-3)^2 = 0$, c'est-à-dire si $x = 3$: $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{3\}$.

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3\,x}{x^2 - 6\,x + 9} = \dfrac{9}{0} = \infty$

$x = 3$ est une asymptote verticale de f.

2) $f(x) = \dfrac{-7\,x^2}{\sqrt{x+3}}$ n'est définie que si $x + 3 > 0$, d'où $\mathrm{D}_f =]-3\,;+\infty[$.

$\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{-7\,x^2}{\sqrt{x+3}} = \dfrac{-63}{0} = \infty$

$x = -3$ est une asymptote verticale de f.

3) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 + 4\,x + 3}$ n'est pas définie si $x^2 + 4\,x + 3 = (x+1)\,(x+3) = 0$; c'est pourquoi $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{-3\,;-1\}$.

$\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 + 4\,x + 3} = \dfrac{0}{0}$: indéterminé

$\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 + 4\,x + 3} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x-2)\,(x+3)}{(x+1)\,(x+3)} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x-2}{x+1} = \dfrac{-5}{-2} = \dfrac{5}{2}$

Le point $(-3\,;\frac{5}{2})$ est un trou.

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 + 4\,x + 3} = \dfrac{-6}{0} = \infty$

$x = -1$ est une asymptote verticale de f.

4) $f(x) = \dfrac{-x}{x^3 + x^2 - 5\,x + 3}$ n'est pas définie si $x^3 + x^2 - 5\,x + 3 = 0$.

On devine que le polynôme $x^3 + x^2 - 5\,x + 3 = 0$ admet la solution $x = 1$.

On le factorise ensuite à l'aide du schéma de Horner :

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -5 & & 3 \\ & 1 & 2 & & -3 \\ \hline 1 & 2 & -3 & \Vert & 0 \end{array}$$

On obtient ainsi $x^3 + x^2 - 5\,x + 3 = (x-1)\,\underbrace{(x^2 + 2\,x - 3)}_{(x-1)\,(x+3)} = (x-1)^2\,(x+3)$.

Par conséquent $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{-3\,;1\}$.

$\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{-x}{x^3 + x^2 - 5\,x + 3} = \dfrac{3}{0} = \infty$

$x = -3$ est une asymptote verticale de f.

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-x}{x^3 + x^2 - 5\,x + 3} = \dfrac{-1}{0} = \infty$

$x = 1$ est une asymptote verticale de f.

5) $f(x) = \left(\dfrac{4\,x}{x^3 - 3\,x^2 + 2\,x}\right)^2$ n'est pas définie si $x^3 - 3\,x^2 + 2\,x =$ $x\,(x^2 - 3\,x + 2) = x\,(x-1)\,(x-2) = 0$. On en tire $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{0\,;1\,;2\}$.

$\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{4\,x}{x^3 - 3\,x^2 + 2\,x}\right)^2 = \dfrac{0}{0}$: indéterminé

$\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{4\,x}{x^3 - 3\,x^2 + 2\,x}\right)^2 = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{4\,x}{x\,(x-1)\,(x-2)}\right)^2 = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{4}{(x-1)\,(x-2)}\right)^2 =$ $\left(\dfrac{4}{2}\right)^2 = 4$

Le point $(0\,;4)$ est un trou.

$\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{4\,x}{x^3 - 3\,x^2 + 2\,x}\right)^2 = \dfrac{16}{0} = \infty$

$x = 1$ est une asymptote verticale de f.

$\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{4\,x}{x^3 - 3\,x^2 + 2\,x}\right)^2 = \dfrac{64}{0} = \infty$

$x = 2$ est une asymptote verticale de f.

6) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x^3 + 3\,x - 4}$ n'est pas définie si $x^3 + 3\,x - 4 = 0$.

Le polynôme $x^3 + 3\,x - 4$ admet $x = 1$ pour solution évidente.

Utilisons le schéma de Horner pour poursuivre la factorisation :

$$\begin{array}{ccc||c} 1 & 0 & 3 & -4 \\ & 1 & 1 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 4 & 0 \end{array}$$

Par conséquent $x^3 + 3\,x - 4 = (x-1)\,(x^2 + x + 4)$.

$x^2 + x + 4$ ne possède aucun zéro, car $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -15 < 0$.

En outre, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x^3 + 3\,x - 4}$ exige $x + 2 \geqslant 0$ pour être bien définie.

On conclut que $\mathrm{D}_f = [-2\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt{x+2}}{x^3 + 3\,x - 4} = \dfrac{0}{-18} = 0$

Le point $(-2\,;0)$ est un point limite.

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+2}}{x^3 + 3\,x - 4} = \dfrac{\sqrt{3}}{0} = \infty$

$x = 1$ est une asymptote verticale de f.