4.3 1) $f(x) = 5\,x - 1 + \underbrace{\dfrac{7}{x^2}}_{\delta(x)}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \delta(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7}{x^2} = 0$

$y = 5\,x - 1$ est ainsi une asymptote oblique de f.

2) $f(x) = \dfrac{4\,x^3 - 6\,x^2 + x - 4}{x^2} = \dfrac{4\,x^3}{x^2} - \dfrac{6\,x^2}{x^2} + \dfrac{x}{x^2} - \dfrac{4}{x^2} = 4\,x - 6 + \underbrace{\dfrac{1}{x} - \dfrac{4}{x^2}}_{\delta(x)}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \delta(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} - \dfrac{4}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} - \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4}{x^2} = 0 - 0 = 0$

$y = 4\,x - 6$ est donc une asymptote oblique de f.

3) $f(x) = \dfrac{x^3 + 3\,x^2 + x + 1}{x} = \dfrac{x^3}{x} + \dfrac{3\,x^2}{x} + \dfrac{x}{x} + \dfrac{1}{x} = x^2 + 3\,x + 1 + \dfrac{1}{x}$

Par conséquent $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^2 + 3\,x + 1 + \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} x^2 + 3\,x + 1$

À l'infini, $f(x)$ ne tend pas vers une asymptote oblique, c'est-à-dire une droite, mais vers la parabole d'équation $y = x^2 + 3\,x + 1$.

4) Effectuons la division polynomiale :

$$\begin{array}{rrr|l}
-x^3 & +\,x^2 & & x^2 + 2 \\ \cline{4-4}
x^3 & & +\,2\,x & -x + 1 \\ \cline{1-3}
 & x^2 & +\,2\,x & \\
 & -\,x^2 & -\,2 & \\ \cline{2-3}
 & & 2\,x - 2 &
\end{array}$$

L'égalité fondamentale de la division $-x^3 + x^2 = (x^2 + 2)\,(-x + 1) + (2\,x - 2)$ implique $f(x) = \dfrac{-x^3 + x^2}{x^2 + 2} = -x + 1 + \underbrace{\dfrac{2\,x - 2}{x^2 + 2}}_{\delta(x)}$.

$\lim\limits_{x\to\infty} \delta(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2\,x - 2}{x^2 + 2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2\,x}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{x} = 0$

$y = -x + 1$ est une asymptote oblique de f.

5) Effectuons la division polynomiale :

$$\begin{array}{rrr|l}
-2\,x^2 & -\,3\,x & +\,2 & x + 1 \\ \cline{4-4}
2\,x^2 & +\,2\,x & & -2\,x - 1 \\ \cline{1-3}
 & -\quad x & +\,2 & \\
 & x & +\,1 & \\ \cline{2-3}
 & & 3 &
\end{array}$$

L'égalité fondamentale de la division $-2\,x^2 - 3\,x + 2 = (x + 1)\,(-2\,x - 1) + 3$ entraîne $f(x) = \dfrac{-2\,x^2 - 3\,x + 2}{x + 1} = -2\,x - 1 + \underbrace{\dfrac{3}{x + 1}}_{\delta(x)}$

$$\lim_{x\to\infty} \delta(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x} = 0$$

$y = -2\,x - 1$ est une asymptote oblique de f.

6) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2\,x}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 + 2\,x}{x^2 - 2\,x + 1}$

Effectuons la division polynomiale :

$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & + \; 2\,x & & x^2 - 2\,x + 1 \\ \cline{4-4} -x^2 & + \; 2\,x & - \; 1 & 1 \\ \cline{1-3} & 4\,x & - \; 1 & \end{array}$$

L'égalité fondamentale de la division $x^2 + 2\,x = (x^2 - 2\,x + 1) \cdot 1 + (4\,x - 1)$ donne $f(x) = \dfrac{x^2 + 2\,x}{x^2 - 2\,x + 1} = 1 + \underbrace{\dfrac{4\,x - 1}{x^2 - 2\,x + 1}}_{\delta(x)}$

$$\lim_{x\to\infty} \delta(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4\,x - 1}{x^2 - 2\,x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{4\,x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x} = 0$$

On obtient ainsi l'asymptote oblique $y = 1 = 0\,x + 1$.

Puisque la pente de l'asymptote oblique est nulle, il s'agit en fait d'une asymptote horizontale.

On constate en effet que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2\,x}{x^2 - 2\,x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$.