4.5 1) (a) i. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4\,x^2+9}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4\,x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|2\,x|}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2\,x}{x}=$
$\lim\limits_{x\to-\infty}-2=-2$

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4\,x^2+9}-(-2\,x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4\,x^2+9}+2\,x=+\infty-\infty$: indéterminé

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4\,x^2+9}+2\,x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\sqrt{4\,x^2+9}+2\,x)\,(\sqrt{4\,x^2+9}-2\,x)}{\sqrt{4\,x^2+9}-2\,x}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(4\,x^2+9)-(2\,x)^2}{\sqrt{4\,x^2}-2\,x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{9}{|2\,x|-2\,x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{9}{-2\,x-2\,x}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{9}{-4\,x}=0$

$y=-2\,x$ est une asymptote oblique à gauche de f.

(b) i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4\,x^2+9}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4\,x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|2\,x|}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\,x}{x}=$
$\lim\limits_{x\to+\infty}2=2$

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4\,x^2+9}-2\,x=+\infty-\infty$: indéterminé

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4\,x^2+9}-2\,x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{4\,x^2+9}-2\,x)\,(\sqrt{4\,x^2+9}+2\,x)}{\sqrt{4\,x^2+9}+2\,x}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(4\,x^2+9)-(2\,x)^2}{\sqrt{4\,x^2}+2\,x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9}{|2\,x|+2\,x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9}{2\,x+2\,x}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9}{4\,x}=0$

$y=2\,x$ est une asymptote oblique à droite de f.

2) (a) i. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\sqrt{3\,x^2+2}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\sqrt{3\,x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+|\sqrt{3}\,x|}{x}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\sqrt{3}\,x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{3}\,x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\sqrt{3}=-\sqrt{3}$

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}1+\sqrt{3\,x^2+2}-(-\sqrt{3}\,x)=\lim\limits_{x\to-\infty}1+\sqrt{3\,x^2+2}+\sqrt{3}\,x=$
$1+\infty-\infty$: indéterminé

$\lim\limits_{x\to-\infty}1+\sqrt{3\,x^2+2}+\sqrt{3}\,x=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}1+\dfrac{(\sqrt{3\,x^2+2}+\sqrt{3}\,x)\,(\sqrt{3\,x^2+2}-\sqrt{3}\,x)}{\sqrt{3\,x^2+2}-\sqrt{3}\,x}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}1+\dfrac{(3\,x^2+2)-(\sqrt{3}\,x)^2}{\sqrt{3\,x^2}-\sqrt{3}\,x}=\lim\limits_{x\to-\infty}1+\dfrac{2}{|\sqrt{3}\,x|-\sqrt{3}\,x}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}1+\dfrac{2}{-\sqrt{3}\,x-\sqrt{3}\,x}=\lim\limits_{x\to-\infty}1+\dfrac{2}{-2\,\sqrt{3}\,x}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}1-\dfrac{1}{\sqrt{3}\,x}=1-0=1$

$y = -\sqrt{3}\,x + 1$ est une asymptote oblique à gauche de f.

(b) i. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\sqrt{3\,x^2+2}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\sqrt{3\,x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+|\sqrt{3}\,x|}{x} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\sqrt{3}\,x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{3}\,x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{3} = \sqrt{3}$

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\sqrt{3\,x^2+2} - \sqrt{3}\,x = 1+\infty-\infty$: indéterminé

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\sqrt{3\,x^2+2} - \sqrt{3}\,x =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{(\sqrt{3\,x^2+2}-\sqrt{3}\,x)\,(\sqrt{3\,x^2+2}+\sqrt{3}\,x)}{\sqrt{3\,x^2+2}+\sqrt{3}\,x} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{(3\,x^2+2)-(\sqrt{3}\,x)^2}{\sqrt{3\,x^2}+\sqrt{3}\,x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{2}{|\sqrt{3}\,x|+\sqrt{3}\,x} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{2}{\sqrt{3}\,x+\sqrt{3}\,x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{2}{2\sqrt{3}\,x} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}\,x} = 1+0 = 1$

$y = \sqrt{3}\,x + 1$ est une asymptote oblique à droite de f.

3) (a) i. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-\sqrt{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-|x|}{x} =$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-(-x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2\,x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2 = 2$

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty} x-\sqrt{x^2-1}-2\,x = \lim\limits_{x\to-\infty} -x-\sqrt{x^2-1} = +\infty-\infty$: indéterminé

$\lim\limits_{x\to-\infty} -x-\sqrt{x^2-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(-x-\sqrt{x^2-1})\,(-x+\sqrt{x^2-1})}{-x+\sqrt{x^2-1}} =$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-(x^2-1)}{-x+\sqrt{x^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{-x+|x|} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{-2\,x} = 0$

$y = 2\,x$ est une asymptote oblique à gauche de f.

(b) i. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\sqrt{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-|x|}{x} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{0}{x} = 0$

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2-1}-0\,x = \lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2-1} = +\infty-\infty$: indéterminé

$\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x-\sqrt{x^2-1})\,(x+\sqrt{x^2-1})}{x+\sqrt{x^2-1}} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-(x^2-1)}{x+\sqrt{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+|x|} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2\,x} = 0$

$y = 0$ est une asymptote horizontale à droite de f.

4) (a) i. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2\,x-\sqrt{4\,x^2+2\,x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2\,x-\sqrt{4\,x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2\,x-|2\,x|}{x} =$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2\,x-(-2\,x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4\,x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 4 = 4$

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty} 2\,x-\sqrt{4\,x^2+2\,x+1}-4\,x = \lim\limits_{x\to-\infty} -2\,x-\sqrt{4\,x^2+2\,x+1} =$
$+\infty-\infty$: indéterminé

$\lim\limits_{x\to-\infty} -2\,x-\sqrt{4\,x^2+2\,x+1} =$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(-2\,x-\sqrt{4\,x^2+2\,x+1})\,(-2\,x+\sqrt{4\,x^2+2\,x+1})}{-2\,x+\sqrt{4\,x^2+2\,x+1}} =$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4\,x^2-(4\,x^2+2\,x+1)}{-2\,x+\sqrt{4\,x^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2\,x-1}{-2\,x+|2\,x|} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2\,x}{-2\,x-2\,x} =$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2\,x}{-4\,x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

$y = 4\,x + \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à gauche de f.

(b) i. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\,x-\sqrt{4\,x^2+2\,x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\,x-\sqrt{4\,x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\,x-|2\,x|}{x} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\,x-2\,x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{0}{x} = 0$

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\,x-\sqrt{4\,x^2+2\,x+1}-0\,x = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\,x-\sqrt{4\,x^2+2\,x+1} =$
$\infty-\infty$: indéterminé

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2\,x-\sqrt{4\,x^2+2\,x+1} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2\,x-\sqrt{4\,x^2+2\,x+1})\,(2\,x+\sqrt{4\,x^2+2\,x+1})}{2\,x+\sqrt{4\,x^2+2\,x+1}} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4\,x^2-(4\,x^2+2\,x+1)}{2\,x+\sqrt{4\,x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2\,x-1}{2\,x+|2\,x|} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2\,x}{2\,x+2\,x} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2\,x}{4\,x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$

$y = -\frac{1}{2}$ est une asymptote horizontale à droite de f.