4.6 1) f n'est pas définie si $x^2-9=(x+3)\,(x-3)=0$. Donc $\mathrm{D}_f=\mathbb{R}-\{-3\,;3\}$.

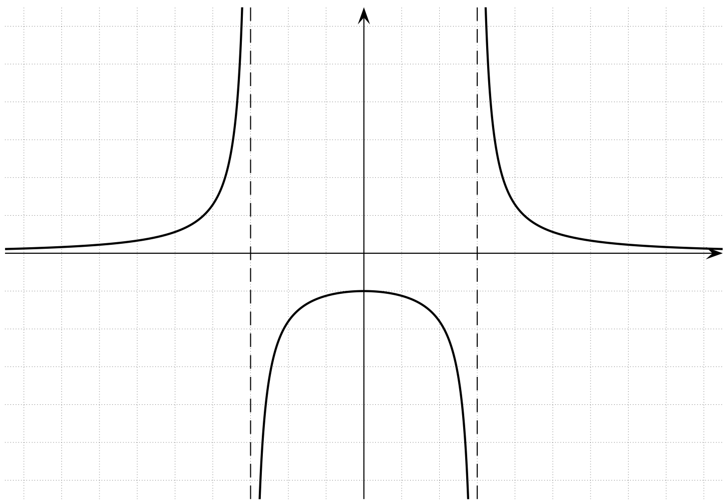
(a) $\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{9}{x^2-9}=\frac{9}{0}=\infty$
$x=-3$ est une asymptote verticale de f.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{9}{x^2-9}=\frac{9}{0}=\infty$
$x=3$ est une asymptote verticale de f.

(c) $$\begin{array}{r|l} 9 & x^2-9 \\ \cline{2-2} 0 & 0 \\ \hline 9 & \end{array}$$
$y=0$ est une asymptote horizontale de f.

$$\delta(x)=\frac{9}{x^2-9}=\frac{9}{(x+3)\,(x-3)}$$

		-3		3	
9	$+$	‖	$+$	‖	$+$
$x+3$	$-$	‖	$+$	‖	$+$
$x-3$	$-$	‖	$-$	‖	$+$
δ	$+$	‖	$-$	‖	$+$



2) f n'est pas définie si $x^2-3\,x-10=(x+2)\,(x-5)=0$.
C'est pourquoi $\mathrm{D}_f=\mathbb{R}-\{-2\,;5\}$.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{x^2-6\,x+5}{x^2-3\,x-10}=\frac{21}{0}=\infty$
$x=-2$ est une asymptote verticale de f

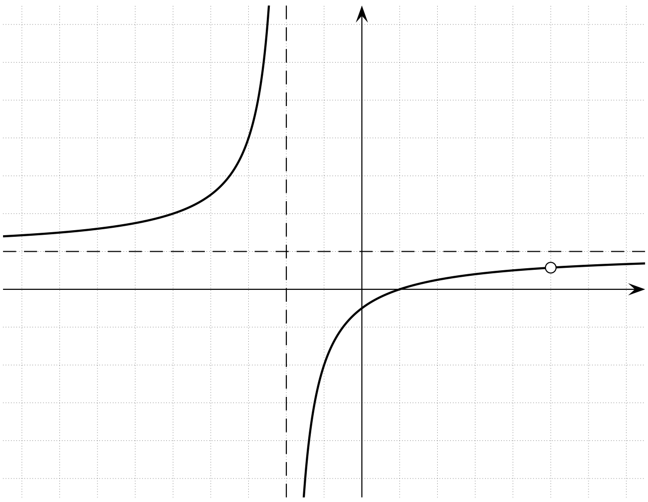
(b) $\displaystyle\lim_{x\to5}\frac{x^2-6\,x+5}{x^2-3\,x-10}=\frac{0}{0}$: indéterminé
$\displaystyle\lim_{x\to5}\frac{x^2-6\,x+5}{x^2-3\,x-10}=\lim_{x\to5}\frac{(x-1)\,(x-5)}{(x+2)\,(x-5)}=\lim_{x\to5}\frac{x-1}{x+2}=\frac{4}{7}$
Le point $(5\,;\frac{4}{7})$ est un trou.

(c) $$\begin{array}{rrrr|l} x^2 & -\,6\,x & + & 5 & x^2-3\,x-10 \\ \cline{5-5} -x^2 & +\,3\,x & + & 10 & 1 \\ \cline{1-4} & -\,3\,x & + & 15 & \end{array}$$

$y = 1$ est une asymptote horizontale de f.

$$\delta(x) = \frac{-3\,x+15}{x^2-3\,x-10} = \frac{-3\,(x-5)}{(x+2)\,(x-5)} = \frac{-3}{x+2}$$

		-2	
-3	$-$	‖	$-$
$x+2$	$-$	‖	$+$
δ	$+$	‖	$-$



3) f n'est pas définie si $x = 0$. D'où $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2-1}{x} = \dfrac{-1}{0} = \infty$

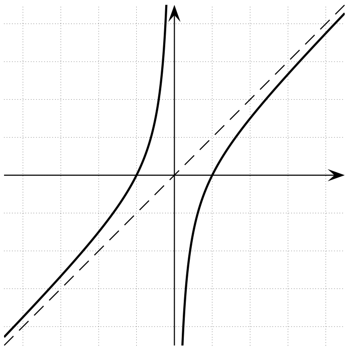
$x = 0$ est une asymptote verticale de f.

(b) $$\begin{array}{rr|l} x^2 & -\,1 & x \\ \cline{3-3} -x^2 & & x \\ \cline{1-2} & -\,1 & \end{array}$$

$y = x$ est une asymptote oblique de f.

$$\delta(x) = \frac{-1}{x}$$

		0	
-1	$-$	‖	$-$
x	$-$	‖	$+$
δ	$+$	‖	$-$



4) Manifestement $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{-1\,;3\}$.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{2\,(x+2)^2}{(x+1)\,(x-3)} = \frac{2}{0} = \infty$

$x = -1$ est une asymptote verticale de f.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{2\,(x+2)^2}{(x+1)\,(x-3)} = \frac{50}{0} = \infty$

$x = 3$ est une asymptote verticale de f.

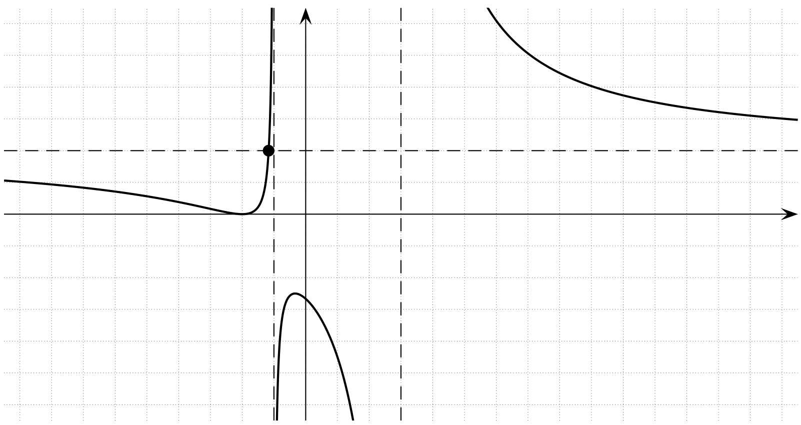
(c) $\displaystyle f(x) = \frac{2\,(x+2)^2}{(x+1)\,(x-3)} = \frac{2\,x^2+8\,x+8}{x^2-2\,x-3}$

$$\begin{array}{rrr|l} 2\,x^2 + & 8\,x + & 8 & x^2-2\,x-3 \\ \cline{4-4} -2\,x^2 + & 4\,x + & 6 & 2 \\ \cline{1-3} & 12\,x + & 14 & \end{array}$$

$y = 2$ est une asymptote horizontale de f.

$\displaystyle\delta(x) = \frac{12\,x+14}{x^2-2\,x-3} = \frac{2\,(6\,x+7)}{(x+1)\,(x-3)}$

		$-\frac{7}{6}$	-1	3
2	$+$	$+$	$+$	$+$
$6\,x+7$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
δ	$-$	$+$	$-$	$+$



5) Il est clair que $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3-4}{x^2} = \frac{-4}{0} = \infty$

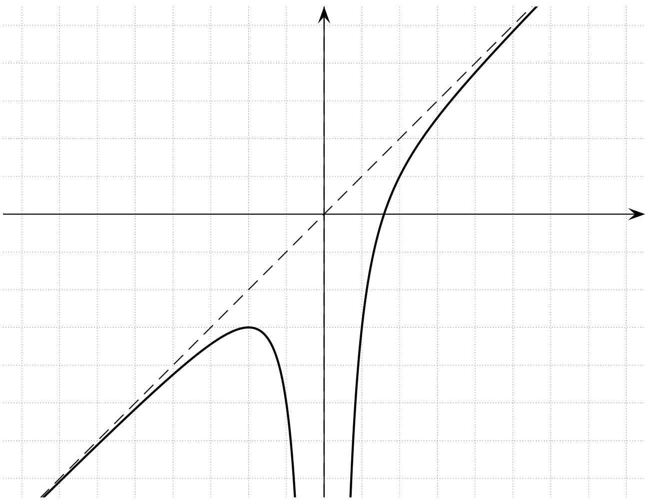
$x = 0$ est une asymptote verticale de f.

(b) $$\begin{array}{rr|l} x^3 & -\;4 & x^2 \\ \cline{3-3} -x^3 & & x \\ \cline{1-2} & -\;4 & \end{array}$$

$y = x$ est une asymptote oblique de f.

$\delta(x) = -\dfrac{4}{x^2}$

		0	
-4	$-$	‖	$-$
x^2	$+$	‖	$+$
δ	$-$	‖	$-$



6) f n'est pas définie si $x^3+1 = (x+1)\,(x^2-x+1) = 0$, donc si $x = -1$.
$x^2-x+1 = 0$ n'admet aucune solution, car $\Delta = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = -3 < 0$.
Par conséquent $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{-1\}$.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^3+1} = \frac{0}{0}$: indéterminé

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^3+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)\,(x-1)}{(x+1)\,(x^2-x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x^2-x+1} = -\frac{2}{3}$$

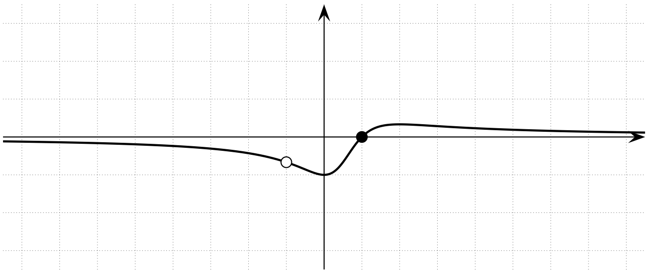
Le point $(-1\,;-\frac{2}{3})$ est un trou.

(b) $$\begin{array}{rr|l} x^2 & -\;1 & x^3+1 \\ \cline{3-3} & 0 & 0 \\ \cline{2-2} x^2 & -\;1 & \end{array}$$

$y = 0$ est une asymptote horizontale de f.

$$\delta(x) = \frac{x^2-1}{x^3+1} = \frac{(x+1)\,(x-1)}{(x+1)\,(x^2-x+1)} = \frac{x-1}{x^2-x+1}$$

		1	
$x-1$	$-$		$+$
x^2-x+1	$+$		$+$
δ	$-$		$+$



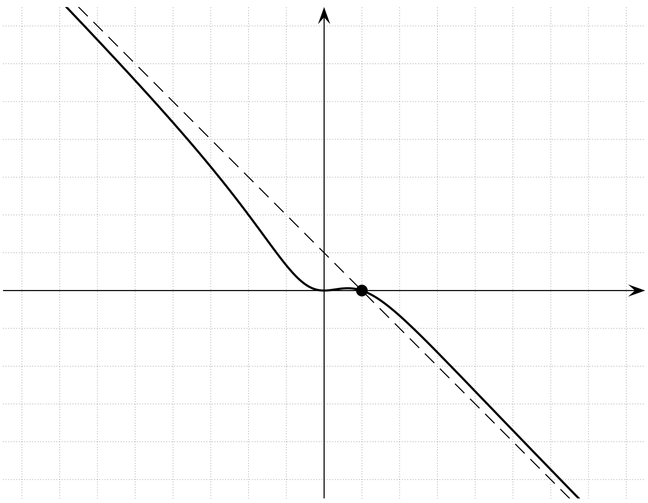
7) $x^2 \geqslant 0$ implique $x^2+2 \geqslant 2 > 0$, si bien que $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$.

(a) $$\begin{array}{rrr|l} -x^3 & +\,x^2 & & x^2+2 \\ \cline{4-4} x^3 & & +\,2\,x & -x+1 \\ \cline{1-3} & x^2 & +\,2\,x & \\ & -\,x^2 & -\,2 & \\ \cline{2-3} & & 2\,x-2 & \end{array}$$

$y = -x+1$ est une asymptote oblique de f.

$\delta(x) = \dfrac{2\,x-2}{x^2+2}$

		1	
$2\,x-2$	$-$		$+$
x^2+2	$+$		$+$
δ	$-$		$+$



8) f n'est pas définie si $(x-1)^2 = 0$, à savoir si $x = 1$. D'où $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = \frac{8}{0} = \infty$

$x = 1$ est une asymptote verticale de f.

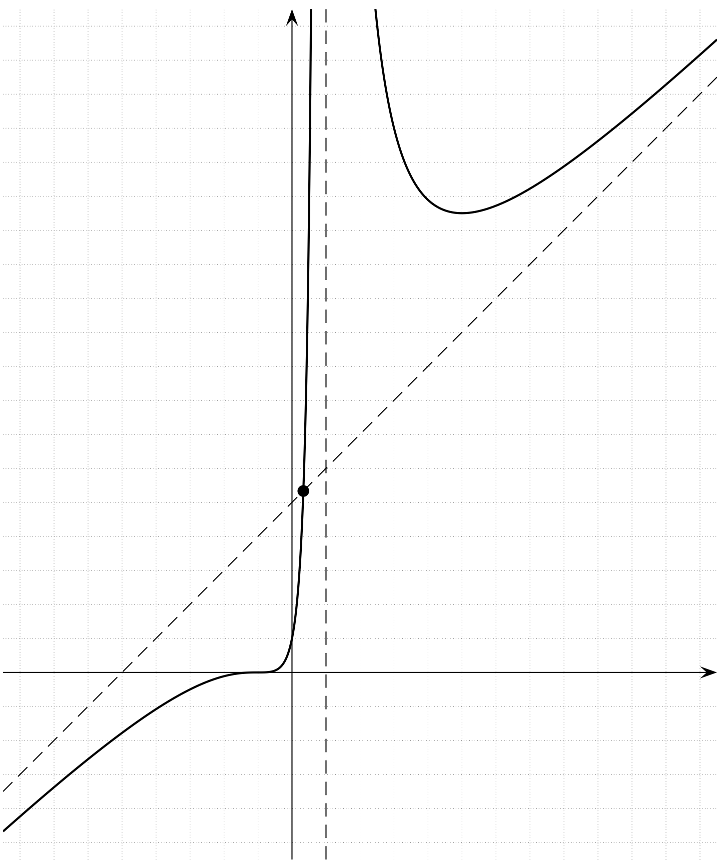
(b) $\displaystyle f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = \frac{x^3+3\,x^2+3\,x+1}{x^2-2\,x+1}$

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +\,3\,x^2 & +\;\;3\,x & +\,1 & x^2-2\,x+1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +\,2\,x^2 & -\;\;\;\;x & & x+5 \\ \cline{1-4}
 & 5\,x^2 & +\;\;2\,x & +\,1 & \\
 & -\,5\,x^2 & +\,10\,x & -\,5 & \\ \cline{2-4}
 & & 12\,x & -\,4 &
\end{array}$$

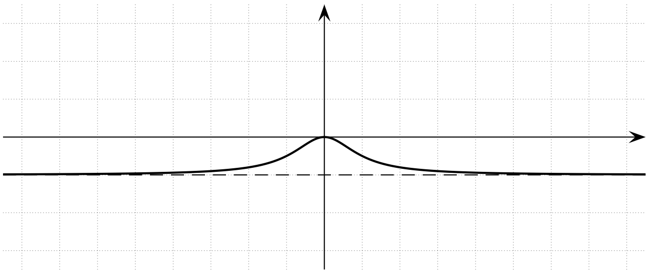
$y = x + 5$ est une asymptote oblique de f.

$$\delta(x) = \frac{12\,x-4}{x^2-2\,x+1} = \frac{4\,(3\,x-1)}{(x-1)^2}$$

		$\frac{1}{3}$		1	
4	$+$		$+$	‖	$+$
$3\,x-1$	$-$		$+$	‖	$+$
$(x-1)^2$	$+$		$+$	‖	$+$
δ	$-$		$+$	‖	$+$



9) De $x^2 \geqslant 0$ on tire que $x^2+1 \geqslant 1 > 0$, de sorte que $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$.
On constate que $f(x) = -1 + \delta(x)$ où $\delta(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
et que $\lim\limits_{x\to\infty} \delta(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$
Il est dès lors évident que f admet $y=-1$ pour asymptote horizontale et que $\delta(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.



10) f n'est pas définie si $x-2=0$, c'est-à-dire si $x=2$. Ainsi $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{2\}$.

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{3} + 1 + \dfrac{2}{x-2} = \dfrac{2}{3} + 1 + \infty = \infty$
$x=2$ est une asymptote verticale de f.

(b) Manifestement $f(x) = \dfrac{1}{3}x + 1 + \delta(x)$ où $\delta(x) = \dfrac{2}{x-2}$
avec $\lim\limits_{x\to\infty} \delta(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{x-2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{x} = 0$
$y = \frac{1}{3}x + 1$ est une asymptote oblique de f.

		2	
2	$-$	‖	$-$
$x-2$	$-$	‖	$+$
δ	$-$	‖	$+$