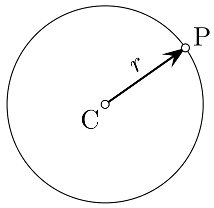
5 Le cercle

Équation cartésienne du cercle

On considère un cercle Γ de centre $\mathrm{C}(x_0\,;y_0)$ de rayon r et un point $\mathrm{P}(x\,;y)$.
Les conditions suivantes sont équivalentes :



1) $\mathrm{P} \in \Gamma$: le point P appartient au cercle Γ
2) $\|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\| = r \iff \|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\|^2 = r^2$
3) $\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2}$

Cette dernière expression constitue l'équation cartésienne du cercle Γ de centre $\mathrm{C}(x_0\,;y_0)$ et de rayon r.

En développant l'équation cartésienne $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, on obtient $x^2 + y^2 - 2\,x_0\,x - 2\,y_0\,y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$.
On constate, dans cette équation du deuxième degré en x et y, que

1) les coefficients de x^2 et de y^2 sont égaux et non nuls ;
2) il n'y a pas de terme en $x\,y$.

Réciproquement, toute équation du deuxième degré en x et y telle que

1) les coefficients de x^2 et de y^2 sont égaux et non nuls,
2) il n'y a pas de terme en $x\,y$,

c'est-à-dire toute équation de la forme $a\,x^2 + a\,y^2 + b\,x + c\,y + d = 0$ avec $a \neq 0$, est soit celle d'un cercle, soit celle de la figure vide.

Preuve Les équations suivantes sont équivalentes :

1) $a\,x^2 + a\,y^2 + b\,x + c\,y + d = 0$
2) $x^2 + y^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a}\,y + \frac{d}{a} = 0$
3) $\underbrace{x^2 + 2\,\frac{b}{2\,a}\,x + (\frac{b}{2\,a})^2}_{(x+\frac{b}{2\,a})^2} - (\frac{b}{2\,a})^2 + \underbrace{y^2 + 2\,\frac{c}{2\,a}\,y + (\frac{c}{2\,a})^2}_{(y+\frac{c}{2\,a})^2} - (\frac{c}{2\,a})^2 + \frac{d}{a} = 0$
4) $(x + \frac{b}{2\,a})^2 + (y + \frac{c}{2\,a})^2 = (\frac{b}{2\,a})^2 + (\frac{c}{2\,a})^2 - \frac{d}{a} = \frac{b^2+c^2-4\,a\,d}{4\,a^2}$

Puisque $4\,a^2 > 0$, on doit distinguer deux cas :

– soit $b^2 + c^2 - 4\,a\,d \geqslant 0$ et l'équation $a\,x^2 + a\,y^2 + b\,x + c\,y + d = 0$ correspond à l'équation du cercle de centre $(-\frac{b}{2\,a}\,; -\frac{c}{2\,a})$ et de rayon $\sqrt{\frac{b^2+c^2-4\,a\,d}{4\,a^2}}$;
– soit $b^2+c^2-4\,a\,d < 0$ et l'équation $a\,x^2+a\,y^2+b\,x+c\,y+d = 0$ est impossible, vu que $(x + \frac{b}{2\,a})^2 \geqslant 0$ et $(y + \frac{c}{2\,a})^2 \geqslant 0$ quels que soient les nombres x et y.

5.1 Indiquer, parmi les équations données ci-dessous, celles qui définissent un cercle. Déterminer alors les coordonnées du centre et le rayon du cercle.

1) $(x-5)^2+(y+2)^2=25$
2) $(x+2)^2+y^2=64$
3) $(x+5)^2+(y-2)^2=0$
4) $x^2+(y-5)^2=5$
5) $x^2+y^2-2\,x+4\,y=20$
6) $x^2+y^2-2\,x+4\,y+14=0$
7) $x^2+y^2+4\,x-2\,y+5=0$
8) $x^2+y^2+x=0$
9) $x^2+y^2+6\,x-4\,y+14=0$
10) $x^2+y^2+y=0$
11) $80\,x^2+80\,y^2-120\,x+80\,y=-17$
12) $144\,x^2+144\,y^2-216\,x+192\,y=-145$

5.2 Calculer la plus courte distance d'un point du cercle $x^2+y^2-26\,x+30\,y=-313$ au point $\mathrm{B}(3\,;9)$.

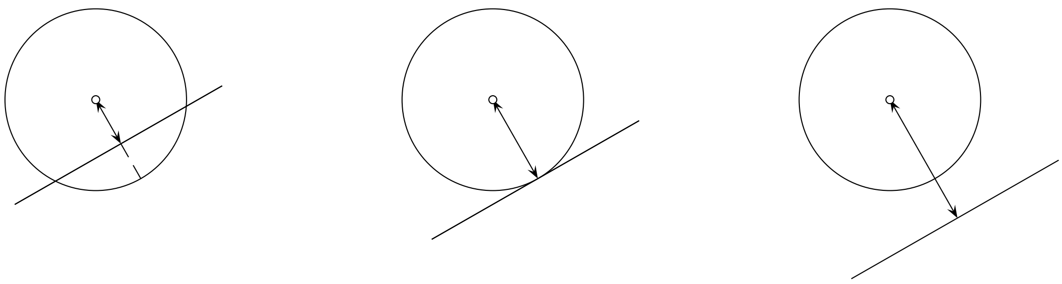
5.3 Déterminer l'équation du symétrique du cercle $x^2+y^2-2\,x-4\,y+4=0$ relativement à la droite d'équation $x=y+3$.

5.4 Déterminer l'équation des cercles définis par les conditions suivantes :

1) Le centre est à l'origine et le rayon est égal à 3.
2) Le centre est $\mathrm{C}(2\,;-3)$ et le rayon est égal à 7.
3) Le cercle passe par l'origine et son centre est $\mathrm{C}(6\,;-8)$.
4) Le cercle passe par $\mathrm{A}(2\,;6)$ et son centre est $\mathrm{C}(-1\,;2)$.
5) Les points $\mathrm{A}(3\,;2)$ et $\mathrm{B}(-1\,;6)$ sont les extrémités d'un diamètre.
6) Le centre est l'origine et le cercle est tangent à la droite $3\,x-4\,y+20=0$.
7) Le centre est $\mathrm{C}(1\,;-1)$ et le cercle est tangent à la droite $5\,x+9=12\,y$.
8) Le cercle passe par $\mathrm{A}(3\,;1)$ et par $\mathrm{B}(-1\,;3)$ et son centre est sur la droite $3\,x=y+2$.
9) Le cercle passe par $\mathrm{A}(1\,;1)$, $\mathrm{B}(1\,;-1)$ et $\mathrm{C}(2\,;0)$.
10) Le cercle passe par $\mathrm{A}(-1\,;5)$, $\mathrm{B}(-2\,;-2)$ et $\mathrm{C}(5\,;5)$.

Position relative de droites et de cercles

Soient une droite d et un cercle Γ de centre C et de rayon r.

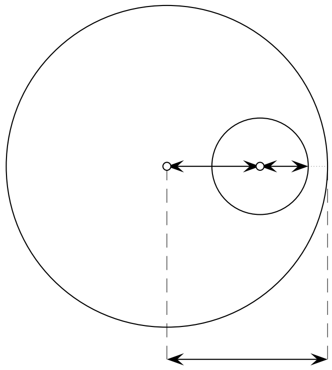


d coupe Γ — $\delta(\mathrm{C}\,;d)<r$

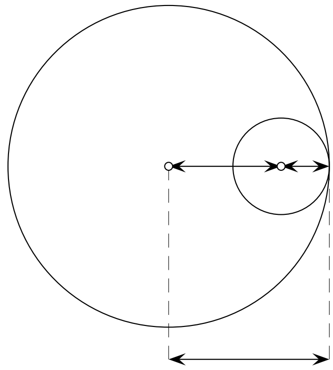
d est tangente à Γ — $\delta(\mathrm{C}\,;d)=r$

d est extérieure à Γ — $\delta(\mathrm{C}\,;d)>r$

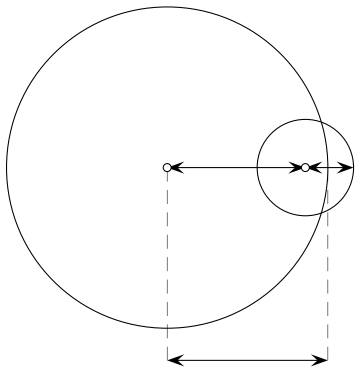
Soient Γ et Γ' deux cercles de centres respectifs C et C′ et de rayons respectifs r et r' (avec $r \leqslant r'$).



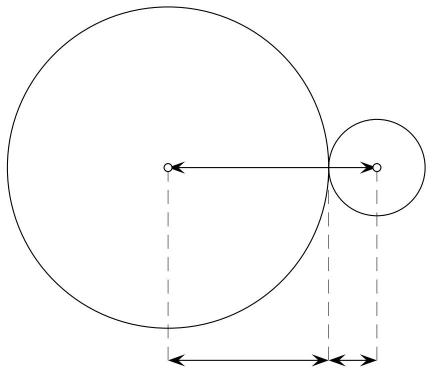
Γ est intérieur à Γ'
$\delta(\mathrm{C}\,;\mathrm{C}') < r' - r$



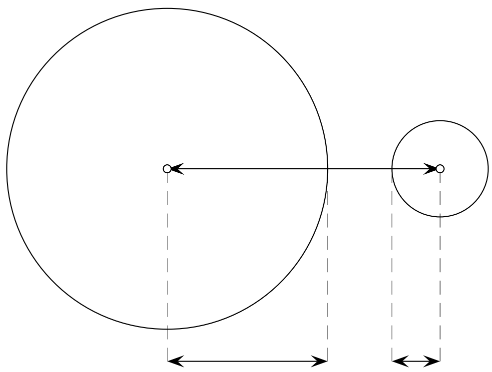
Γ est tangent intérieurement à Γ'
$\delta(\mathrm{C}\,;\mathrm{C}') = r' - r$



Γ coupe Γ'
$r' - r < \delta(\mathrm{C}\,;\mathrm{C}') < r' + r$



Γ et Γ' sont tangents extérieurement
$\delta(\mathrm{C}\,;\mathrm{C}') = r' + r$



Γ et Γ' sont extérieurs
$\delta(\mathrm{C}\,;\mathrm{C}') > r' + r$

5.5 Déterminer si la droite et le cercle se coupent, sont tangents ou extérieurs. Calculer les coordonnées des éventuels points d'intersection.

1) $y = 2\,x - 3$	$x^2 + y^2 - 3\,x + 2\,y = 3$
2) $x - 2\,y - 1 = 0$	$x^2 + y^2 - 8\,x + 2\,y + 12 = 0$
3) $y = x + 10$	$x^2 + y^2 = 1$
4) $3\,x - 2\,y = 4$	$x^2 + y^2 - 6\,x + 8\,y - 1 = 0$

5.6 Pour quelle valeur de m la droite $y = m\,x$

1) est-elle tangente au cercle $x^2 + y^2 - 10\,x + 16 = 0$?
2) coupe-t-elle ce cercle ?

5.7 Soient $\mathrm{A}(1\,;-1)$ et $\mathrm{B}(5\,;6)$. Trouver un point M sur la droite $2\,x - 3\,y = 18$ de sorte que l'angle $\widehat{\mathrm{AMB}} = 45^\circ$.

5.8

1) Vérifier que le cercle $x^2 + y^2 + 2\,x - 6\,y + 5 = 0$ est tangent intérieurement au cercle $x^2 + y^2 - 10\,x - 55 = 0$ et calculer le point de tangence.
2) Vérifier que le cercle $x^2 + y^2 + 14\,x - 12\,y + 65 = 0$ est tangent extérieurement au cercle $x^2 + y^2 - 10\,x - 55 = 0$ et calculer le point de tangence.

5.9 On considère les cercles Γ_1 et Γ_2 donnés respectivement par les équations $x^2 + y^2 - 4\,x - 8\,y + 15 = 0$ et $x^2 + y^2 + 2\,x - 2\,y - 15 = 0$.

1) Vérifier que les cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent.
2) Trouver le cercle qui passe par $\mathrm{A}(4\,;-1)$ et par les points d'intersection de Γ_1 et Γ_2.

5.10 On considère le cercle Γ_1, de centre $\mathrm{C}_1(2\,;-1)$ et de rayon 9, et le cercle Γ_2, de rayon 4 et dont le centre C_2 se trouve sur la droite $y = 4$. Soit encore la droite d d'équation $8\,x - 15\,y = 0$.

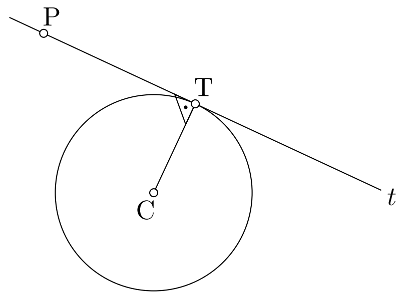
1) Déterminer les valeurs de l'abscisse k de C_2 pour lesquelles le cercle Γ_2 est tangent à la droite d.
2) Déterminer les valeurs de l'abscisse k de C_2 pour lesquelles les deux cercles Γ_1 et Γ_2 sont tangents (intérieurement ou extérieurement).

5.11 Déterminer les équations des cercles qui ont leur centre sur la droite $4\,x - 5\,y = 3$ et qui sont tangents aux droites $2\,x = 3\,y + 10$ et $2\,y = 3\,x + 5$.

5.12 Déterminer l'équation du cercle qui est tangent aux droites $3\,y = 4\,x + 10$ et $4\,x = 3\,y + 30$, et dont le centre est situé sur la droite d'équation $2\,x + y = 0$.

5.13 Déterminer les équations des cercles tangents aux droites $y = 7\,x - 5$ et $x + y + 13 = 0$, $\mathrm{T}(1\,;2)$ étant l'un des points de contact.

Tangente en un point du cercle



On considère un cercle Γ de centre $\mathrm{C}(x_0\,;y_0)$ et de rayon r, un point $\mathrm{T}(x_1\,;y_1)$ situé sur le cercle Γ, la tangente t au cercle Γ au point T et $\mathrm{P}(x\,;y)$ un point du plan.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $\mathrm{P} \in t$
2) $\overrightarrow{\mathrm{CT}} \perp \overrightarrow{\mathrm{TP}}$
3) $0 = \overrightarrow{\mathrm{CT}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{TP}}$
4) $0 = \overrightarrow{\mathrm{CT}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{CP}} - \overrightarrow{\mathrm{CT}}) = \overrightarrow{\mathrm{CT}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CP}} - \overrightarrow{\mathrm{CT}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CT}}$
5) $\overrightarrow{\mathrm{CT}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CP}} = \overrightarrow{\mathrm{CT}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CT}} = \|\overrightarrow{\mathrm{CT}}\|^2 = r^2$
6) $\begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = (x_1 - x_0)\,(x - x_0) + (y_1 - y_0)\,(y - y_0) = r^2$

En conclusion, l'équation de la tangente en un point $\mathrm{T}(x_1\,;y_1)$ du cercle de centre $\mathrm{C}(x_0\,;y_0)$ et de rayon r est donnée par la formule :

$$\boxed{(x_1 - x_0)\,(x - x_0) + (y_1 - y_0)\,(y - y_0) = r^2}$$

5.14 Après avoir vérifié que le point T est sur le cercle, déterminer l'équation de la tangente au cercle au point T :

1) $\mathrm{T}(-1\,;2)$ $\quad(\Gamma) : x^2 + y^2 = 5$
2) $\mathrm{T}(-5\,;7)$ $\quad(\Gamma) : (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$
3) $\mathrm{T}(0\,;0)$ $\quad(\Gamma) : x^2 + y^2 = 3\,x - 7\,y$
4) $\mathrm{T}(-1\,;2)$ $\quad(\Gamma) : x^2 + y^2 - 2\,x + 6\,y = 19$
5) $\mathrm{T}(2\,;3)$ $\quad(\Gamma) : 2\,x^2 + 2\,y^2 = x + 4\,y + 12$
6) $\mathrm{T}(2\,;1)$ $\quad(\Gamma) : 3\,x^2 + 3\,y^2 = 2\,x + 11$

5.15 Calculer la valeur de l'angle aigu entre la droite $3\,x - y = 1$ et le cercle $(x-2)^2 + y^2 = 5$.

On appelle angle d'une droite et d'un cercle l'angle formé par la droite et la tangente au cercle en l'un des points d'intersection.

5.16 Calculer la valeur de l'angle sous lequel se coupent les deux cercles $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 8$ et $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 2$.

On appelle angle de deux cercles l'angle formé par les tangentes aux cercles en l'un des points d'intersection.

Tangentes de pente m

Soient un cercle Γ de centre $C(x_0\,;y_0)$ et de rayon r et une droite d d'équation $y = m\,x + h$.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) La droite d est tangente au cercle Γ.
2) $\delta(C\,;d) = \dfrac{|m\,x_0 - y_0 + h|}{\sqrt{m^2+1}} = r$
3) $m\,x_0 - y_0 + h = \pm r\,\sqrt{m^2+1}$
4) $h = -m\,x_0 + y_0 \pm r\,\sqrt{m^2+1}$
5) La droite d a pour équation $y = m\,x - m\,x_0 + y_0 \pm r\,\sqrt{m^2+1}$
6) La droite d a pour équation $y - y_0 = m\,(x - x_0) \pm r\,\sqrt{m^2+1}$

Par conséquent, les équations des tangentes de pente m au cercle de centre $C(x_0\,;y_0)$ et de rayon r sont données par la formule :

$$\boxed{y - y_0 = m\,(x - x_0) \pm r\,\sqrt{m^2+1}}$$

5.17 Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 + 10\,x = 2\,y - 6$ qui sont parallèles à la droite $2\,x + y = 7$.

5.18 Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 - 2\,x + 4\,y = 0$ qui sont perpendiculaires à la droite $x = 2\,y + 345$.

5.19 Déterminer les équations des tangentes au cercle Γ issues du point A :

1) $(\Gamma) : x^2 + y^2 = 19 - 2\,x$ $\quad$ $A(1\,;6)$
2) $(\Gamma) : x^2 + y^2 - 2\,x + 4\,y = 20$ $\quad$ $A(6\,;5)$

5.20 Calculer l'angle entre les deux tangentes au cercle $x^2 + y^2 = 10$ issues du point $A(4\,;2)$.

5.21 On trace les tangentes au cercle $x^2+y^2 = 6\,x-2\,y-5$ issues du point $A(4\,;-4)$. Calculer la longueur de la corde passant par les points de tangence.

Problèmes

5.22 On donne le point $C(0\,;9)$ et le cercle Γ d'équation $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$.

1) Construire graphiquement le triangle ABC isocèle de sommet A tel que Γ soit le cercle inscrit du triangle ABC et l'abscisse du point A soit positive.
2) Calculer les coordonnées des sommets A et B.
3) Calculer les coordonnées des points de contact A', B' et C' du cercle Γ avec les côtés BC, CA et AB respectivement.

5.23 On considère les points $A(0\,;5)$, $B(6\,;-3)$ et $C(7\,;4)$.

1) Montrer que le triangle ABC est rectangle et déterminer l'équation du cercle Γ_1 circonscrit à ce triangle.
2) Déterminer l'équation du cercle Γ_2 de rayon $2,5$ qui coupe Γ_1 en A et dont le centre E, d'abscisse strictement positive, est situé sur la droite d'équation $4\,x - 2\,y + 5 = 0$.
3) Trouver les équations des tangentes t_1 et t_2 en A à Γ_1 et Γ_2 respectivement et montrer que ces tangentes sont perpendiculaires.

5.24 On donne les sommets $A(-15\,;-5)$ et $B(1\,;7)$ d'un triangle ABC.

1) Déterminer les coordonnées du sommet C de ce triangle, sachant que le centre du cercle inscrit dans le triangle est l'origine du repère.
2) Calculer l'aire du triangle ABC.

5.25 On considère le point $A(3\,;5)$ et les droites $(d) : x - 3\,y + 12 = 0$ et $(e) : x - y - 4 = 0$.

1) Déterminer les coordonnées des sommets B et C du triangle ABC, isocèle en C, tel que la droite d soit le support du côté AC et que e soit la médiatrice des points A et B.
2) Déterminer l'équation du cercle Γ circonscrit au triangle ABC.
3) Déterminer les équations des tangentes t_1 et t_2 au cercle Γ respectivement aux points A et B.
4) Montrer que les tangentes t_1 et t_2 se coupent sur la droite e.

5.26 On donne le point $T(-21\,;20)$ et le cercle Γ de centre $C(4\,;-5)$ et de rayon $15\sqrt{2}$.

1) Déterminer les équations des tangentes au cercle Γ issues du point T, ainsi que les coordonnées de leurs points de contact A et B avec le cercle.
2) Déterminer les coordonnées du centre I du cercle inscrit dans le triangle ABT.
3) Montrer que le point I appartient au cercle Γ.

5.27 Calculer les coordonnées des sommets du triangle ABC donné par :
– le sommet $B(2\,;6)$;
– la hauteur issue de C $(h_C) : x - 2\,y + 5 = 0$;
– la bissectrice intérieure issue de C $(b_C) : x - 7\,y + 15 = 0$.

Réponses

5.1

1) $C(5\,;-2)$	$r = 5$	2) $C(-2\,;0)$	$r = 8$
3) $C(-5\,;2)$	$r = 0$ (cercle-point)	4) $C(0\,;5)$	$r = \sqrt{5}$
5) $C(1\,;-2)$	$r = 5$	6) $\varnothing$	
7) $C(-2\,;1)$	$r = 0$ (cercle-point)	8) $C(-\frac{1}{2}\,;0)$	$r = \frac{1}{2}$
9) $\varnothing$		10) $C(0\,;-\frac{1}{2})$	$r = \frac{1}{2}$
11) $C(\frac{3}{4}\,;-\frac{1}{2})$	$r = \frac{\sqrt{15}}{5}$	12) $C(\frac{3}{4}\,;-\frac{2}{3})$	$r = 0$ (cercle-point)

5.2 17

5.3 $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 1$

5.4

1) $x^2 + y^2 = 9$	2) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 49$
3) $(x-6)^2 + (y+8)^2 = 100$	4) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$
5) $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 8$	6) $x^2 + y^2 = 16$
7) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$	8) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 10$
9) $(x-1)^2 + y^2 = 1$	10) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$

5.5
1) La droite et le cercle se coupent en $(0\,;-3)$ et $(\frac{11}{5}\,;\frac{7}{5})$.
2) La droite et le cercle sont tangents en $(3\,;1)$.
3) La droite et le cercle sont extérieurs.
4) La droite et le cercle se coupent en $(-2\,;-5)$ et $(2\,;1)$.

5.6 1) $m = -\frac{3}{4}$ ou $m = \frac{3}{4}$ 2) $-\frac{3}{4} < m < \frac{3}{4}$

5.7 $M(3\,;-4)$ ou $M(12\,;2)$

5.8 1) $T(-3\,;4)$ 2) $T(-3\,;4)$

5.9 2) $(x+4)^2 + (y+2)^2 = 65$

5.10 1) $k = -1$ ou $k = 16$ 2) intérieurement : $k = 2$
extérieurement : $k = -10$ ou $k = 14$

5.11 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{81}{13}$ et $(x+8)^2 + (y+7)^2 = \frac{25}{13}$

5.12 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$

5.13 $(x+6)^2 + (y-3)^2 = 50$ et $(x-29)^2 + (y+2)^2 = 800$

5.14 1) $x - 2\,y + 5 = 0$ 2) $3\,x - 4\,y + 43 = 0$ 3) $3\,x - 7\,y = 0$

4) $2\,x-5\,y+12=0$ 5) $7\,x+8\,y-38=0$ 6) $5\,x+3\,y-13=0$

5.15 45°

5.16 90°

5.17 $2\,x+y-1=0$ et $2\,x+y+19=0$

5.18 $2\,x+y-5=0$ et $2\,x+y+5=0$

5.19 1) $2\,x+y-8=0$ et $x-2\,y+11=0$
2) $12\,x-35\,y+103=0$ et $x=6$

5.20 90°

5.21 $\sqrt{10}$

5.22 2) $\mathrm{A}(\frac{3}{2}\,;\frac{3}{4})$ $\mathrm{B}(-6\,;-3)$ 3) $\mathrm{A}'(-3\,;3)$ $\mathrm{B}'(\frac{6}{5}\,;\frac{12}{5})$ $\mathrm{C}'(0\,;0)$

5.23 1) $(x-3)^2+(y-1)^2=25$
2) $(x-2)^2+(y-\frac{13}{2})^2=\frac{25}{4}$
3) $(t_1):3\,x-4\,y+20=0$ $(t_2):4\,x+3\,y-15=0$

5.24 1) $\mathrm{C}(10\,;-5)$ 2) 150

5.25 1) $\mathrm{B}(9\,;-1)$ $\mathrm{C}(12\,;8)$
2) $(x-\frac{33}{4})^2+(y-\frac{17}{4})^2=\frac{225}{8}$
3) $(t_1):7\,x-y-16=0$ $(t_2):x-7\,y-16=0$

5.26 1) $(t_1):7\,x+y+127=0$ $\mathrm{A}(-17\,;-8)$ 2) $\mathrm{I}(-11\,;10)$
$(t_2):x+7\,y-119=0$ $\mathrm{B}(7\,;16)$

5.27 $\mathrm{A}(7\,;-4)$ $\mathrm{C}(-1\,;2)$