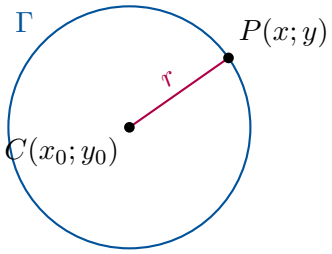
Le cercle

1. Équation cartésienne du cercle



Soit un cercle Γ de centre $C(x_0;y_0)$ et de rayon r, et un point $P(x;y)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $P \in \Gamma$: le point P appartient au cercle Γ ;

2) $\left\|\overrightarrow{CP}\right\| = r \iff \left\|\overrightarrow{CP}\right\|^2 = r^2$;

3) $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$.

Équation cartésienne du cercle

Le cercle Γ de centre $C(x_0;y_0)$ et de rayon r a pour équation

$$\boxed{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2}.$$

Forme développée

En développant, on obtient

$$x^2 + y^2 - 2x_0\,x - 2y_0\,y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0.$$

C'est une équation du second degré en x et y telle que

1) les coefficients de x^2 et de y^2 sont **égaux et non nuls** ;

2) il n'y a **pas de terme en** xy.

Réciproque

Toute équation de la forme

$$\boxed{a\,x^2 + a\,y^2 + b\,x + c\,y + d = 0 \qquad (a \neq 0)}$$

est soit celle d'un cercle, soit celle de la figure vide (ou d'un point, voir ci-dessous).

Preuve : on complète les carrés

$$\begin{aligned}
& a\,x^2 + a\,y^2 + b\,x + c\,y + d = 0 \\
\iff\ & x^2 + y^2 + \tfrac{b}{a}\,x + \tfrac{c}{a}\,y + \tfrac{d}{a} = 0 \\
\iff\ & \underbrace{x^2 + 2\tfrac{b}{2a}\,x + \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2}_{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} - \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2 + \underbrace{y^2 + 2\tfrac{c}{2a}\,y + \left(\tfrac{c}{2a}\right)^2}_{\left(y+\frac{c}{2a}\right)^2} - \left(\tfrac{c}{2a}\right)^2 + \tfrac{d}{a} = 0 \\
\iff\ & \left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 + \left(y + \tfrac{c}{2a}\right)^2 = \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2 + \left(\tfrac{c}{2a}\right)^2 - \tfrac{d}{a} = \frac{b^2 + c^2 - 4ad}{4a^2}
\end{aligned}$$

Comme $4a^2 > 0$, le signe de $b^2 + c^2 - 4ad$ décide :

— si $b^2 + c^2 - 4ad > 0$: c'est le cercle de centre $\left(-\dfrac{b}{2a}\,;-\dfrac{c}{2a}\right)$ et de rayon $\boxed{r = \dfrac{\sqrt{b^2 + c^2 - 4ad}}{2|a|}}$;

— si $b^2+c^2-4ad<0$: l'équation est impossible, car $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ et $\left(y+\frac{c}{2a}\right)^2 \geq 0$ pour tous x, y : **aucun point**.

Remarques

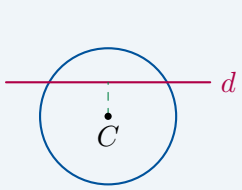
— Si $b^2+c^2-4ad=0$, le rayon est nul : l'équation est celle d'un **cercle-point** (le seul point $\left(-\frac{b}{2a};-\frac{c}{2a}\right)$).

— *En pratique* : on divise par a, puis on complète les carrés pour lire le centre et le rayon.

2. Position relative d'une droite et d'un cercle

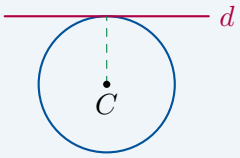
Droite et cercle

Soit une droite d et un cercle Γ de centre C et de rayon r. On compare la distance $\delta(C;d)$ au rayon :



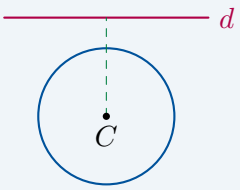
d **coupe** Γ

$\delta(C;d)<r$



d **est tangente à** Γ

$\delta(C;d)=r$



d **est extérieure à** Γ

$\delta(C;d)>r$

Calculer les points d'intersection

1) On exprime une inconnue grâce à l'équation de la droite (par exemple y en fonction de x).

2) On la remplace dans l'équation du cercle : on obtient une équation du second degré en x.

3) Le nombre de solutions donne la position relative : deux solutions $\Rightarrow$ la droite **coupe** le cercle ; une solution (discriminant nul) $\Rightarrow$ **tangente** ; aucune solution $\Rightarrow$ **extérieure**.

3. Position relative de deux cercles

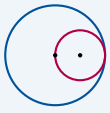
Soient Γ et Γ' deux cercles de centres C et C' et de rayons r et r', avec $r \leq r'$. On note $\delta = \delta(C;C')$ la distance entre les centres.

Deux cercles



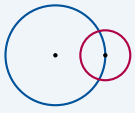
Γ **est intérieur à** Γ'

$\delta < r'-r$



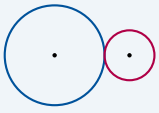
Γ **est tangent intérieurement à** Γ'

$\delta = r'-r$



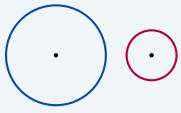
Γ **coupe** Γ'

$r'-r<\delta<r'+r$



Γ **et** Γ' **sont tangents extérieurement**

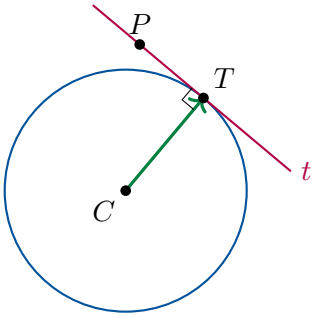
$\delta = r'+r$



Γ **et** Γ' **sont extérieurs**

$\delta > r'+r$

4. Tangente en un point du cercle



Soit Γ de centre $C(x_0;y_0)$ et de rayon r, un point $T(x_1;y_1) \in \Gamma$, la tangente t à Γ en T et $P(x;y)$ un point du plan.

Démonstration

$$\begin{aligned}
P \in t &\iff \overrightarrow{CT} \perp \overrightarrow{TP} \\
&\iff \overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{TP} = 0 \\
&\iff \overrightarrow{CT} \cdot (\overrightarrow{CP} - \overrightarrow{CT}) = 0 \\
&\iff \overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{CT} = \left\|\overrightarrow{CT}\right\|^2 = r^2 \\
&\iff \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = r^2
\end{aligned}$$

Tangente en $T(x_1;y_1)$

L'équation de la tangente en un point $T(x_1;y_1)$ du cercle de centre $C(x_0;y_0)$ et de rayon r est

$$\boxed{(x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) = r^2}.$$

Remarques

- **Avant tout**, on vérifie que T est bien sur le cercle.
- $\overrightarrow{CT}$ est un vecteur normal de la tangente.
- Moyen mnémotechnique : on « dédouble » l'équation $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$ en remplaçant un des facteurs $(x - x_0)$ par $(x_1 - x_0)$, et un des facteurs $(y - y_0)$ par $(y_1 - y_0)$.

5. Tangentes de pente donnée

Soit un cercle Γ de centre $C(x_0;y_0)$ et de rayon r, et une droite $d :\ y = mx + h$.

Démonstration

$$\begin{aligned}
d \text{ est tangente à } \Gamma &\iff \delta(C;d) = \frac{|mx_0 - y_0 + h|}{\sqrt{m^2+1}} = r \\
&\iff mx_0 - y_0 + h = \pm r\sqrt{m^2+1} \\
&\iff h = -mx_0 + y_0 \pm r\sqrt{m^2+1} \\
&\iff d :\ y = mx - mx_0 + y_0 \pm r\sqrt{m^2+1} \\
&\iff d :\ y - y_0 = m(x - x_0) \pm r\sqrt{m^2+1}
\end{aligned}$$

Tangentes de pente m

Les équations des tangentes de pente m au cercle de centre $C(x_0; y_0)$ et de rayon r sont

$$y - y_0 = m(x - x_0) \pm r\sqrt{m^2 + 1}.$$

Il y a deux tangentes de pente m (une pour chaque signe $\pm$).

Remarques

— Cette formule ne concerne que les droites de pente m (non verticales). Les deux tangentes **verticales** sont $x = x_0 \pm r$.

— Tangentes **parallèles** à une droite d_0 : $m = m_{d_0}$. Tangentes **perpendiculaires** à d_0 : $m = -\dfrac{1}{m_{d_0}}$ (si $m_{d_0} \neq 0$).

Complément : tangentes issues d'un point A extérieur au cercle

1) On vérifie que $A(x_A; y_A)$ est extérieur : $\delta(A; C) > r$.

2) On écrit une droite non verticale passant par A : $y - y_A = m(x - x_A)$, c'est-à-dire $mx - y + (y_A - mx_A) = 0$, puis on impose $\delta(C; d) = r$. On obtient une équation en m.

3) On teste séparément la droite **verticale** $x = x_A$: elle est tangente si et seulement si $|x_A - x_0| = r$.

6. Angles

Définitions

— L'**angle d'une droite et d'un cercle** est l'angle formé par la droite et la tangente au cercle en l'un des points d'intersection.

— L'**angle de deux cercles** est l'angle formé par les tangentes aux cercles en l'un des points d'intersection.

Méthode

1) On calcule un point d'intersection T.

2) On écrit l'équation de la (ou des) tangente(s) en T (formule de la section 4).

3) On calcule l'angle aigu entre les deux droites obtenues, par les pentes $\varphi = \text{Arctan}\left|\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|$, ou par les vecteurs normaux :

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \, \|\vec{n}_2\|}.$$

Remarques

— Chaque tangente est perpendiculaire au rayon qui aboutit en T : l'angle entre les tangentes est donc aussi l'angle entre les rayons $\overrightarrow{CT}$ et $\overrightarrow{C'T}$.

— Cas particulier : deux cercles se coupent à angle droit si et seulement si $\delta(C; C')^2 = r^2 + r'^2$ (théorème de Pythagore dans le triangle CTC').