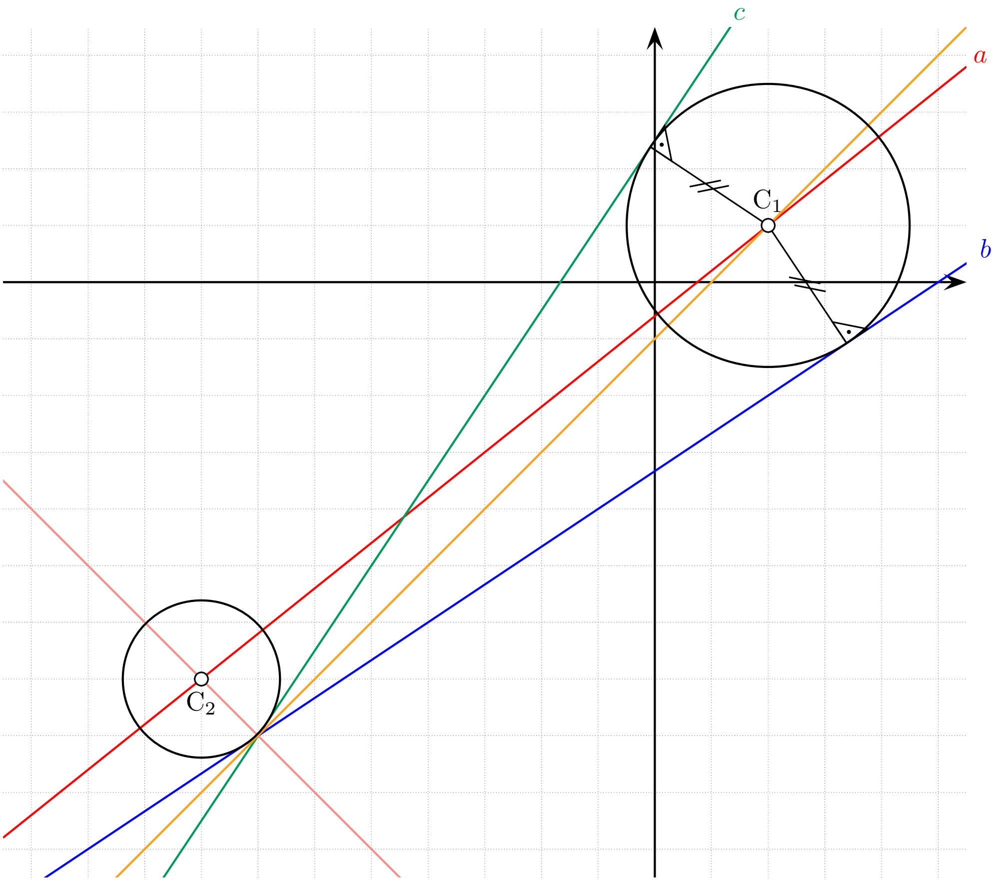
5.11



Pour désigner les droites de l'énoncé, on pose :

$(a) : 4\,x - 5\,y = 3$

$(b) : 2\,x = 3\,y + 10$

$(c) : 2\,y = 3\,x + 5$

Pour qu'un cercle soit tangent aux droites b et c, il faut que son centre soit équidistant des droites b et c. Or le lieu des points équidistants de deux droites données est formé par les bissectrices b_1 et b_2 (intérieure et extérieure) de ces droites. Par conséquent, le centre d'un cercle recherché doit se situer à l'intersection de l'une des bissectrices avec la droite a.

Calcul des bissectrices des droites b et c

$$\frac{2\,x - 3\,y - 10}{\underbrace{\sqrt{2^2 + (-3)^2}}_{\sqrt{13}}} = \pm\frac{-3\,x + 2\,y - 5}{\underbrace{\sqrt{(-3)^2 + 2^2}}_{\sqrt{13}}}$$

1) $2\,x - 3\,y - 10 = -3\,x + 2\,y - 5$ donne $5\,x - 5\,y - 5 = 0$
ou plus simplement $\boxed{(b_1) : x - y - 1 = 0}$.

2) $2\,x - 3\,y - 10 = -(-3\,x + 2\,y - 5)$ délivre $-x - y - 15 = 0$
ou encore $\boxed{(b_2) : x + y + 15 = 0}$.

Calcul du centre $C_1 = a \cap b_1$

$$\begin{cases} 4\,x - 5\,y - 3 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

La seconde équation délivre $y = x - 1$ que l'on remplace dans la seconde : $4\,x - 5\,(x-1) - 3 = 0$, d'où suit $x = 2$.

Par suite, $y = 2 - 1 = 1$, si bien que l'on obtient $\boxed{C_1(2\,;1)}$.

Calcul du rayon $r_1 = \delta(C_1\,;b)$

$$r_1 = \frac{\left|\,2\cdot 2 - 3\cdot 1 - 10\,\right|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|-9|}{\sqrt{13}} = \frac{9}{\sqrt{13}} \qquad \left(= \frac{9\sqrt{13}}{13}\right)$$

Équation du premier cercle

$$\boxed{(x-2)^2 + (y-1)^2 = \tfrac{81}{13}}$$

Calcul du centre $C_2 = a \cap b_2$

$$\begin{cases} 4\,x - 5\,y - 3 = 0 \\ x + y + 15 = 0 \end{cases}$$

La seconde équation implique $y = -x - 15$ que l'on substitue dans la première : $4\,x - 5\,(-x-15) - 3$ fournit $x = -8$.

Il en découle $y = -(-8) - 15 = -7$ et aussi $\boxed{C_2(-8\,;-7)}$.

Calcul du rayon $r_2 = \delta(C_2\,;b)$

$$r_2 = \frac{\left|\,2\cdot(-8) - 3\cdot(-7) - 10\,\right|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{13}} \qquad \left(= \frac{5\sqrt{13}}{13}\right)$$

Équation du second cercle

$$\boxed{(x+8)^2 + (y+7)^2 = \tfrac{25}{13}}$$