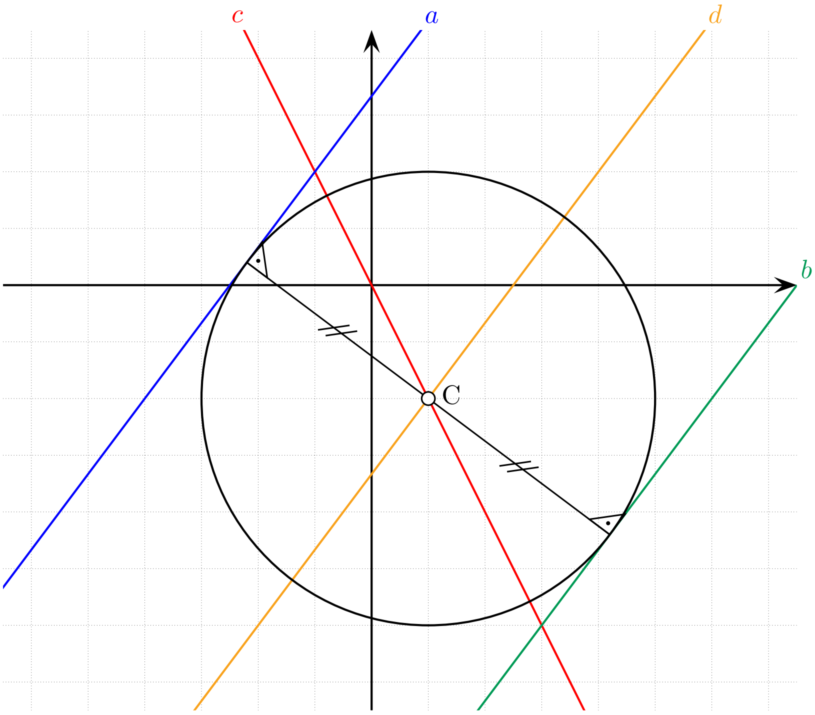
5.12



On désigne les droites de l'énoncé comme suit :

$(a) : 3\,y = 4\,x + 10$

$(b) : 4\,x = 3\,y + 30$

$(c) : 2\,x + y = 0$

Soit $\mathrm{C}(c_1\,;c_2)$ le centre du cercle recherché.

Le point C doit être équidistant des droites a et b : $\delta(\mathrm{C}\,;a) = \delta(\mathrm{C}\,;b)$.

On a donc $\dfrac{\big|\,4\cdot c_1 - 3\cdot c_2 + 10\,\big|}{\underbrace{\sqrt{4^2+(-3)^2}}_{5}} = \dfrac{\big|\,4\cdot c_1 - 3\cdot c_2 - 30\,\big|}{\underbrace{\sqrt{4^2+(-3)^2}}_{5}}$.

On en déduit $4\cdot c_1 - 3\cdot c_2 + 10 = \pm(4\cdot c_1 - 3\cdot c_2 - 30)$.

1) $4\,c_1 - 3\,c_2 + 10 = 4\,c_1 - 3\,c_2 - 30$ conduit à $40 = 0$, ce qui est manifestement impossible.

2) $4\,c_1 - 3\,c_2 + 10 = -(4\,c_1 - 3\,c_2 - 30)$ fournit $8\,c_1 - 6\,c_2 - 20 = 0$ ou encore $\boxed{4\,c_1 - 3\,c_2 - 10 = 0}$.
L'ensemble des points satisfaisant cette équation correspond à la droite d.

Comme le centre du cercle doit être situé sur la droite c, ses coordonnées doivent vérifier son équation : $2\,c_1 + c_2 = 0$.

Le point C se situe ainsi à l'intersection des droites c et d :

$$\begin{cases} 2\,c_1 + c_2 = 0 \\ 4\,c_1 - 3\,c_2 - 10 = 0 \end{cases}$$

La première équation implique $c_2 = -2\,c_1$ que l'on substitue dans la seconde :
$4\,c_1 - 3\,(-2\,c_1) - 10 = 0$ donne $c_1 = 1$.
Par conséquent, $c_2 = -2\,c_1 = -2 \cdot 1 = -2$.
On a donc trouvé $\boxed{\mathrm{C}(1\,;-2)}$.

Il nous reste encore à calculer le rayon du cercle :
$r = \delta(\mathrm{C}\,;a) = \dfrac{|\,4 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) + 10\,|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \dfrac{20}{5} = 4$

On conclut finalement que l'équation du cercle recherché est :
$\boxed{(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16}$.