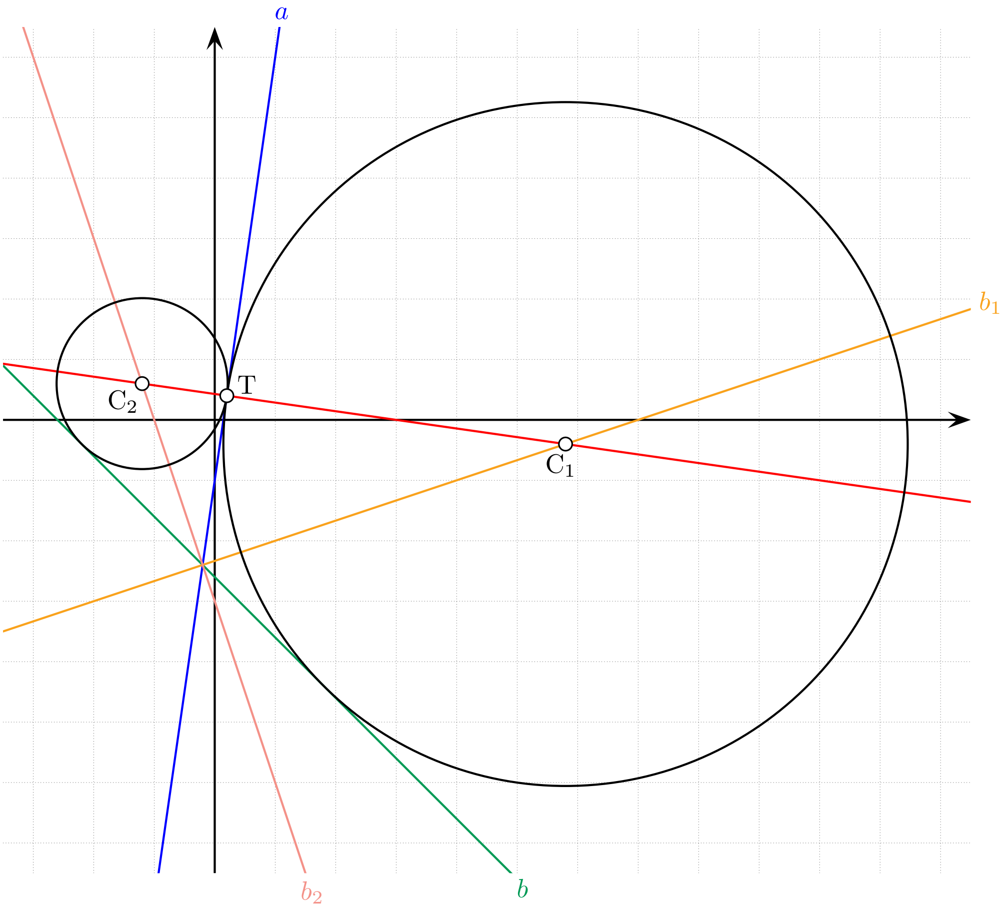
5.13



On appelle $(a) : y = 7\,x - 5$ et $(b) : x + y + 13 = 0$ les droites de l'énoncé.

Lorsqu'un cercle est tangent aux droites a et b, son centre est équidistant des droites a et b, si bien qu'il se situe sur les bissectrices de ces droites.

Calcul des bissectrices des droites a et b

$$\frac{7\,x - y - 5}{\underbrace{\sqrt{7^2 + (-1)^2}}_{\sqrt{50} = 5\sqrt{2}}} = \pm \frac{x + y + 13}{\underbrace{\sqrt{1^2 + 1^2}}_{\sqrt{2}}} \quad \text{donne} \quad 7\,x - y - 5 = \pm 5\,(x + y + 13)$$

1) $7\,x - y - 5 = 5\,(x + y + 13)$ implique $2\,x - 6\,y - 70 = 0$
ou encore $\boxed{(b_1) : x - 3\,y - 35 = 0}$.

2) $7\,x - y - 5 = -5\,(x + y + 13)$ mène à $12\,x + 4\,y + 60 = 0$
ou plus simplement $\boxed{(b_2) : 3\,x + y + 15 = 0}$.

Vérifions que le point $\mathrm{T}(1\,;2)$ appartient à la droite a : $2 = 7 \cdot 1 - 5$.

Si la droite p désigne la perpendiculaire à la droite a passant par T, alors le centre d'un cercle répondant aux exigences de l'énoncé se situe sur p, car la droite menant du centre du cercle à un point de tangence est perpendiculaire à la tangente au cercle en ce point.

Calcul de la perpendiculaire p

Comme la droite $(a) : 7\,x - y - 5 = 0$ admet pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$, la perpendiculaire p est de la forme $(p) : x + 7\,y + c = 0$.
On sait par ailleurs qu'elle doit passer par le point $T(1\,;2)$:
$1 + 7 \cdot 2 + c = 0$ délivre $c = -15$.
Par conséquent, l'équation de la perpendiculaire p est $\boxed{(p) : x + 7\,y - 15 = 0}$.

Calcul du centre $C_1 = p \cap b_1$ du premier cercle

$$\begin{cases} x + 7\,y - 15 = 0 \\ x - 3\,y - 35 = 0 \end{cases}$$

La première équation donne $x = -7\,y + 15$ que l'on remplace dans la seconde :
$-7\,y + 15 - 3\,y - 35 = 0$ fournit $y = -2$.
Ainsi $x = -7 \cdot (-2) + 15 = 29$ et $\boxed{C_1(29\,;-2)}$.

Calcul du rayon r_1 du premier cercle

$$r_1 = \delta(C_1\,;a) = \frac{|7 \cdot 29 - (-2) - 5|}{\sqrt{7^2 + (-1)^2}} = \frac{|200|}{\sqrt{50}} = \frac{200}{5\,\sqrt{2}} = \frac{40}{\sqrt{2}} = \frac{40\,\sqrt{2}}{2} = 20\,\sqrt{2}$$

Équation du premier cercle

$\boxed{(x - 29)^2 + (y + 2)^2 = (20\,\sqrt{2})^2 = 800}$

Calcul du centre $C_2 = p \cap b_2$ du second cercle

$$\begin{cases} x + 7\,y - 15 = 0 \\ 3\,x + y + 15 = 0 \end{cases}$$

La seconde équation implique $y = -3\,x - 15$ que l'on substitue dans la première :
$x + 7\,(-3\,x - 15) - 15 = 0$ mène à $x = -6$.
On obtient ainsi $y = -3 \cdot (-6) - 15 = 3$ et $\boxed{C_2(-6\,;3)}$.

Calcul du rayon r_2 du second cercle

$$r_2 = \delta(C_2\,;a) = \frac{|7 \cdot (-6) - 3 - 5|}{\sqrt{7^2 + (-1)^2}} = \frac{|-50|}{\sqrt{50}} = \frac{50}{5\,\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{10\,\sqrt{2}}{2} = 5\,\sqrt{2}$$

Équation du second cercle

$\boxed{(x + 6)^2 + (y - 3)^2 = (5\,\sqrt{2})^2 = 50}$