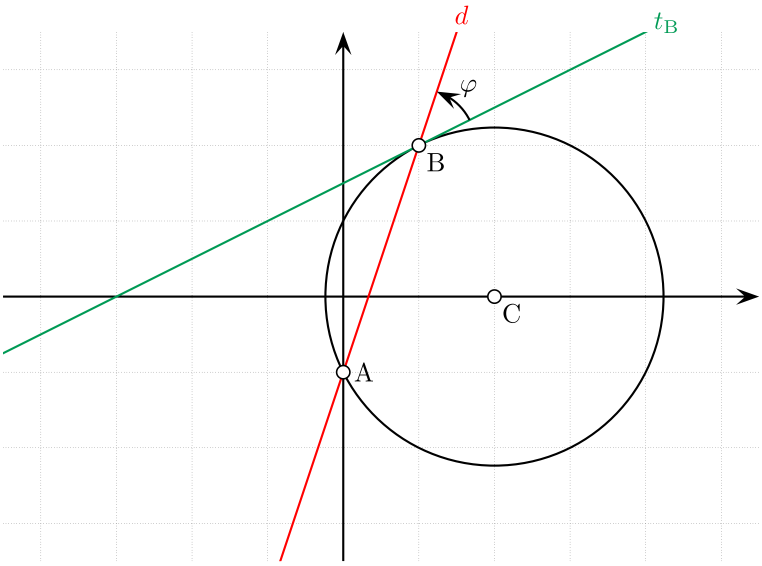
5.15



On appelle $(d) : 3\,x - y = 1$ la droite de l'énoncé et $(\Gamma) : (x-2)^2 + y^2 = 5$ le cercle de l'énoncé.

Position relative de la droite d et du cercle Γ.

$\delta(\mathrm{C}\,;d) = \dfrac{\left|3 \cdot 2 - 0 - 1\right|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \dfrac{|5|}{\sqrt{10}} = \dfrac{5\sqrt{10}}{10} = \dfrac{\sqrt{10}}{2} \approx 1,58 < \sqrt{5} \approx 2,24$

La droite d et le cercle Γ se coupent donc bel et bien.

Calcul des points d'intersection $d \cap \Gamma$

$\begin{cases} 3\,x - y = 1 \\ (x-2)^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

L'équation de la droite d donne $y = 3\,x - 1$ que l'on remplace dans l'équation du cercle Γ :

$(x-2)^2 + (3\,x-1)^2 = 5$

$x^2 - 4\,x + 4 + 9\,x^2 - 6\,x + 1 - 5 = 0$

$10\,x^2 - 10\,x = 0$

$10\,x\,(x-1) = 0$

On obtient ainsi les deux points d'intersection :

1) $x = 0$ implique $y = 3 \cdot 0 - 1 = -1$, d'où $\boxed{\mathrm{A}(0\,;-1)}$.

2) $x = 1$ fournit $y = 3 \cdot 1 - 1 = 2$, d'où suit $\boxed{\mathrm{B}(1\,;2)}$.

Calcul de la tangente au cercle Γ au point B

$(1-2)\,(x-2) + 2\,y = 5$

$-(x-2) + 2\,y = 5$

$-x + 2 + 2\,y - 5 = 0$

$\boxed{(t_{\mathrm{B}}) : x - 2\,y + 3 = 0}$

Calcul de l'angle $\varphi = \angle(t_{\mathrm{B}}, d)$

La tangente t_{B} s'écrit $y = \frac{1}{2}\,x + \frac{3}{2}$, si bien qu'elle a pour pente $m_1 = \frac{1}{2}$.

La droite d s'écrit $y = 3\,x - 1$, de sorte que sa pente vaut $m_2 = 3$.

$$\tan(\varphi) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1\,m_2} = \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} \cdot 3} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = 1$$

On conclut que $\boxed{\varphi = 45^\circ}$.