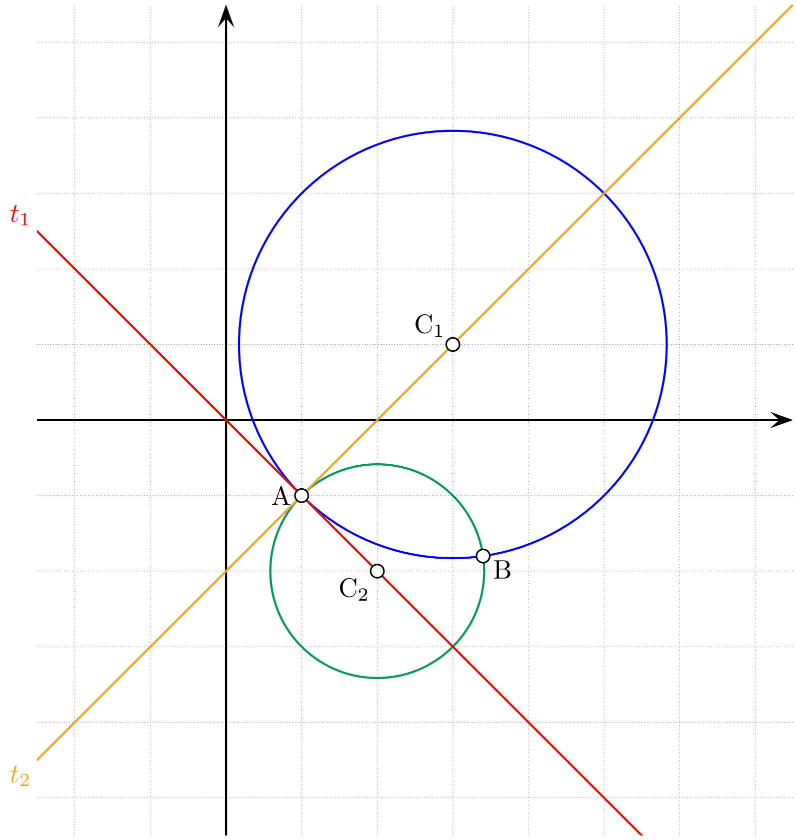
5.16



On désigne les cercles de l'énoncé comme suit :

$(\Gamma_1) : (x-3)^2 + (y-1)^2 = 8$

$(\Gamma_2) : (x-2)^2 + (y+2)^2 = 2$

Position relative des cercles Γ_1 et Γ_2

$r_1 - r_2 = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2} \approx 1,41$

$$\delta(\mathrm{C}_1\,;\mathrm{C}_2) = \|\overrightarrow{\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2}\| = \left\|\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(-1)^2+(-3)^2} = \sqrt{10} \approx 3,16$$

$r_1 + r_2 = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \approx 4,24$

Puisque $r_1 - r_2 < \delta(\mathrm{C}_1\,;\mathrm{C}_2) < r_1 + r_2$, les cercles Γ_1 et Γ_2 sont sécants.

Calcul des points d'intersection $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$

$$\begin{cases}(x-3)^2 + (y-1)^2 = 8\\(x-2)^2 + (y+2)^2 = 2\end{cases}$$

En développant ces équations, on obtient :

$$\begin{cases}x^2 + y^2 - 6\,x - 2\,y + 2 = 0\\x^2 + y^2 - 4\,x + 4\,y + 6 = 0\end{cases}$$

En soustrayant la première équation de la seconde, on trouve :

$2\,x + 6\,y + 4 = 0$ ou plus simplement $x + 3\,y + 2 = 0$.

On en déduit $x = -3\,y - 2$ que l'on remplace dans l'équation de l'un des cercles, par exemple celle du cercle Γ_1 :

$(-3\,y-2)^2 + y^2 - 6\,(-3\,y-2) - 2\,y + 2 = 0$

$9\,y^2 + 12\,y + 4 + y^2 + 18\,y + 12 - 2\,y + 2 = 0$

$10\,y^2 + 28\,y + 18 = 0$

$5\,y^2 + 14\,y + 9 = 0$

Puisque $\Delta = 14^2 - 4 \cdot 5 \cdot 9 = 16 = 4^2 > 0$, il y a deux solutions :

1) $y_1 = \frac{-14+4}{2\cdot 5} = -1$ implique $x_1 = -3\cdot(-1)-2 = 1$, c'est-à-dire $\boxed{\mathrm{A}(1\,;-1)}$.

2) $y_2 = \frac{-14-4}{2\cdot 5} = -\frac{9}{5}$ fournit $x_2 = -3 \cdot (-\frac{9}{5}) - 2 = \frac{17}{5}$, à savoir $\boxed{\mathrm{B}(\frac{17}{5}\,;-\frac{9}{5})}$.

Calcul de la tangente au cercle Γ_1 au point A

$(1-3)\,(x-3) + (-1-1)\,(y-1) = 8$

$-2\,(x-3) - 2\,(y-1) = 8$

$x - 3 + y - 1 = -4$

$\boxed{(t_1) : x + y = 0}$

Calcul de la tangente au cercle Γ_2 au point A

$(1-2)\,(x-2) + (-1+2)\,(y+2) = 2$

$-(x-2) + (y+2) = 2$

$-x + 2 + y + 2 = 2$

$\boxed{(t_2) : -x + y + 2 = 0}$

Calcul de l'angle formé par les tangentes t_1 et t_2

La tangente $(t_1) : x + y = 0$ admet pour vecteur directeur $\vec{d_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

La tangente $(t_2) : -x + y + 2 = 0$ admet pour vecteur directeur $\vec{d_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si φ désigne l'angle formé par les vecteurs $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$, alors on a :

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{d_1} \cdot \vec{d_2}}{\|\vec{d_1}\|\,\|\vec{d_2}\|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\| \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|} = \frac{1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}\,\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{0}{2} = 0$$

On conclut que $\varphi = \arccos(0) = 90^\circ$.