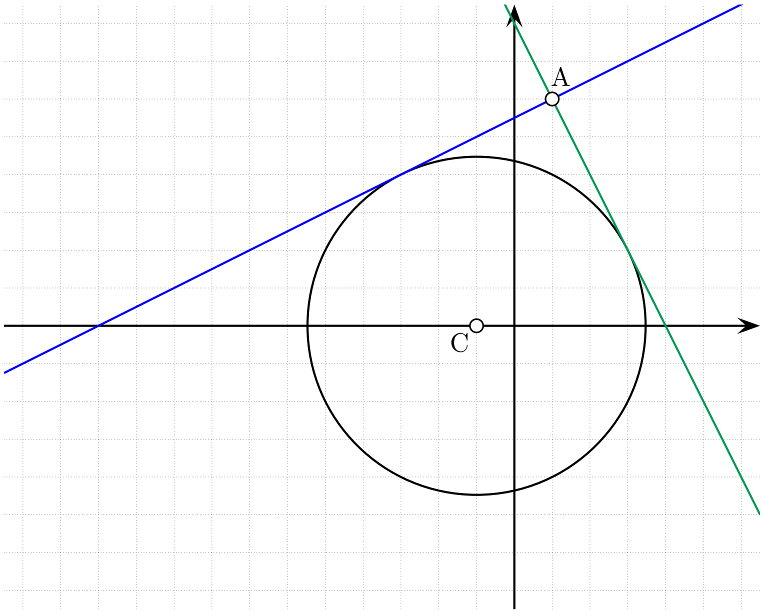
5.19 1)



Calcul du centre et du rayon du cercle Γ

$x^2+y^2=19-2\,x$

$\underbrace{x^2+2\,x+1}_{(x+1)^2}-1+y^2=19$

$(x+1)^2+y^2=19+1=20=(2\sqrt{5})^2$

$\boxed{C(-1\,;0)}$ et $\boxed{r=2\sqrt{5}}$

Calcul des tangentes au cercle Γ issues du point A

Les équations des tangentes de pente m sont données par la formule :

$y-0=m\big(x-(-1)\big)\pm\,2\sqrt{5}\,\sqrt{m^2+1}$

$y=m\,(x+1)\pm\,2\sqrt{5}\,\sqrt{m^2+1}$

On cherche les tangentes passant par le point $A(1\,;6)$:

$6=m\,(1+1)\pm\,2\sqrt{5}\,\sqrt{m^2+1}$

$6-2\,m=\pm\,2\sqrt{5}\,\sqrt{m^2+1}$

En élevant au carré les membres de cette égalité, on obtient :

$(6-2\,m)^2=4\cdot5\,(m^2+1)$

$36-24\,m+4\,m^2=20\,m^2+20$

$0=16\,m^2+24\,m-16$

$0=2\,m^2+3\,m-2$

$\Delta=3^2-4\cdot2\cdot(-2)=25=5^2$

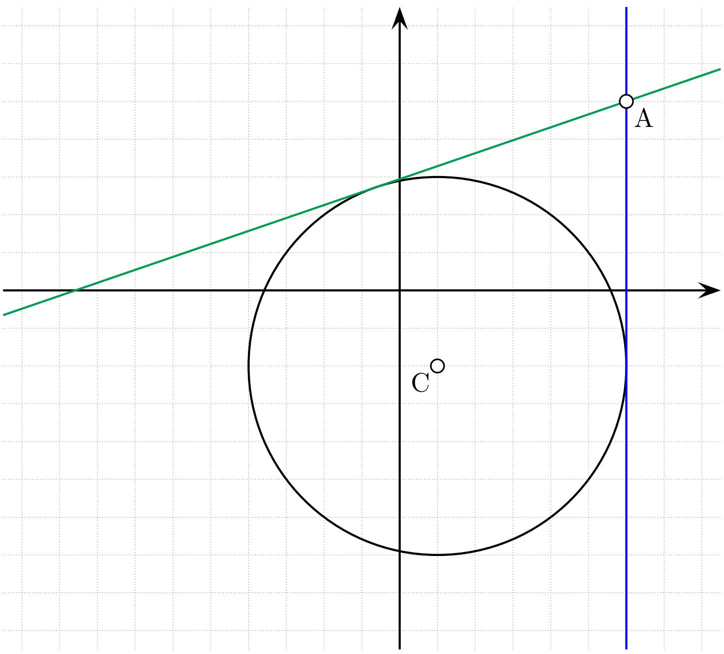
(a) $m_1=\frac{-3+5}{2\cdot2}=\frac{1}{2}$

La première tangente a donc pour pente $m_1=\frac{1}{2}$.

Son équation est ainsi de la forme $y=\frac{1}{2}\,x+h$.

On sait également qu'elle doit passer par le point $\text{A}(1\,;6)$:
$6 = \frac{1}{2} \cdot 1 + h$ implique $h = \frac{11}{2}$.
L'équation de la première tangente est donc $y = \frac{1}{2}\,x + \frac{11}{2}$ ou encore $\boxed{x - 2\,y + 11 = 0}$.

(b) $m_2 = \frac{-3-5}{2 \cdot 2} = -2$
La seconde tangente a ainsi pour pente $m_2 = -2$.
Par conséquent, son équation est de la forme $y = -2\,x + h$.
Mais cette tangente doit en outre passer par le point $\text{A}(1\,;6)$:
$6 = -2 \cdot 1 + h$ conduit à $h = 8$.
En résumé, l'équation de la seconde tangente est $y = -2\,x + 8$ ou encore $\boxed{2\,x + y - 8 = 0}$.

2) 

Calcul du centre et du rayon du cercle Γ

$x^2 + y^2 - 2\,x + 4\,y = 20$

$\underbrace{x^2 - 2\,x + 1}_{(x-1)^2} - 1 + \underbrace{y^2 + 4\,y + 4}_{(y+2)^2} - 4 = 20$

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 20 + 1 + 4 = 25 = 5^2$

$\boxed{\text{C}(1\,;-2)}$ et $\boxed{r = 5}$

Calcul des tangentes au cercle Γ issues du point A (1^{re} méthode)

Les équations des tangentes de pente m sont données par la formule :

$y - (-2) = m\,(x-1) \pm 5\,\sqrt{m^2+1}$

$y + 2 = m\,(x-1) \pm 5\,\sqrt{m^2+1}$

On cherche les tangentes passant par le point $\mathrm{A}(6\,;5)$:
$5+2=m\,(6-1)\pm\,5\,\sqrt{m^2+1}$
$7-5\,m=\pm\,5\,\sqrt{m^2+1}$

En élevant au carré les termes de cette équation, il résulte :
$(7-5\,m)^2=25\,(m^2+1)$
$49-70\,m+25\,m^2=25\,m^2+25$
$0=70\,m-24$
$m=\frac{12}{35}$

(a) La première tangente a ainsi pour pente $m=\frac{12}{35}$.
Son équation est par conséquent de la forme $y=\frac{12}{35}\,x+h$.
Par ailleurs, cette tangente doit passer par le point $\mathrm{A}(6\,;5)$:
$5=\frac{12}{35}\cdot 6+h$ mène à $h=\frac{103}{35}$.
On conclut que l'équation de la première tangente est $y=\frac{12}{35}\,x+\frac{103}{35}$
ou plus simplement $\boxed{12\,x-35\,y+103=0}$.

(b) Puisque l'on n'a trouvé qu'une seule pente possible, cela signifie que la seconde tangente n'a pas de pente : il s'agit dès lors d'une droite verticale de la forme $x+c=0$.
On sait que cette droite verticale doit passer par le point $\mathrm{A}(6\,;5)$:
$6+c=0$ délivre $c=-6$.
En définitive, l'équation de la seconde tangente est $\boxed{x-6=0}$.

Calcul des tangentes au cercle Γ issues du point A (2e méthode)
Soit (t) : $a\,x+b\,y+c=0$ l'équation d'une tangente au cercle Γ issue du point A.

Puisque le point $\mathrm{A}(6\,;5)$ se situe sur cette tangente, ses coordonnées vérifient son équation : $6\,a+5\,b+c=0$.
On en tire la formule de substitution $\boxed{c=-6\,a-5\,b}$.

Pour qu'une droite soit tangente à un cercle, il faut que la distance du centre du cercle à cette droite soit égale au rayon du cercle :
$$5=\delta(\mathrm{C}\,;t)=\frac{\left|\,a\cdot 1+b\cdot(-2)+c\,\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\left|\,a-2\,b+(-6\,a-5\,b)\,\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\left|\,-5\,a-7\,b\,\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
On obtient donc l'égalité $5\,\sqrt{a^2+b^2}=\left|\,-5\,a-7\,b\,\right|$.

En élevant au carré les termes de cette équation, il suit :
$25\,(a^2+b^2)=(-5\,a-7\,b)^2$
$25\,a^2+25\,b^2=25\,a^2+70\,a\,b+49\,b^2$
$0=70\,a\,b+24\,b^2$
$0=2\,b\,(35\,a+12\,b)$

Il y a par conséquent deux possibilités :

(a) $b = 0$

Dans ce cas, $c = -6\,a - 5 \cdot 0 = -6\,a$ et l'équation de la première tangente est donnée par $a\,x - 6\,a = 0$.

En choisissant $a = 1$, on a $\boxed{x - 6 = 0}$.

(b) $b = -\frac{35}{12}\,a$

On a alors $c = -6\,a - 5 \cdot (-\frac{35}{12}\,a) = \frac{103}{12}\,a$, si bien que l'équation de la seconde tangente est $a\,x - \frac{35}{12}\,a\,y + \frac{103}{12}\,a$.

En choisissant $a = 12$, on obtient $\boxed{12\,x - 35\,y + 103 = 0}$.