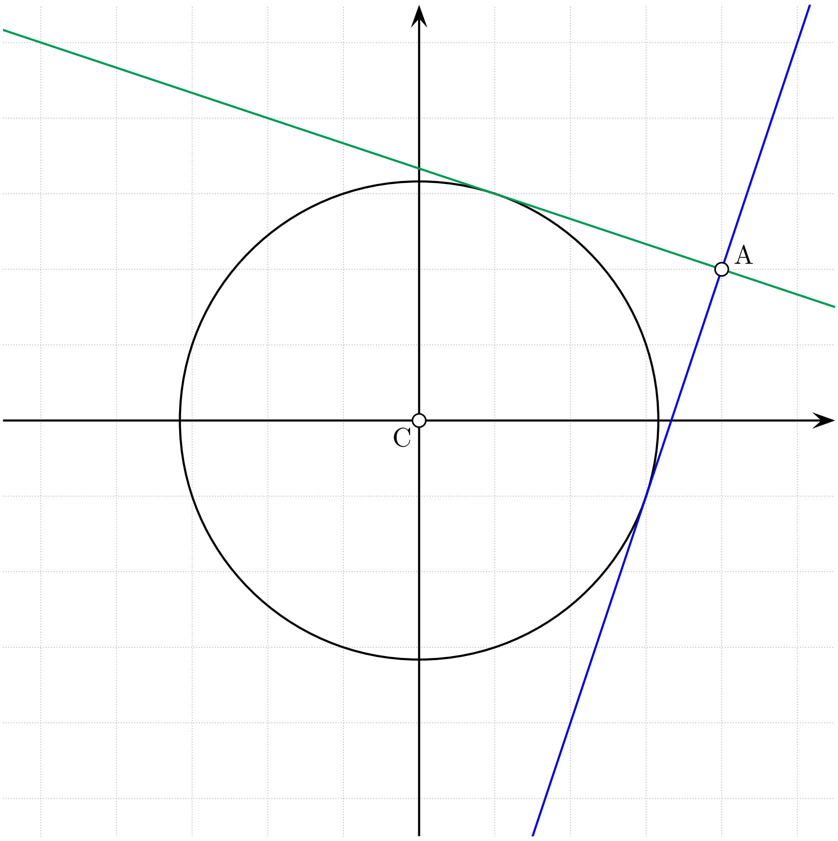
5.20



Calcul des tangentes au cercle issues du point A

Les tangentes au cercle, de centre $\mathrm{C}(0\,;0)$ et de rayon $r = \sqrt{10}$, de pente m sont données par la formule :

$y - 0 = m\,(x - 0) + \pm\sqrt{10}\,\sqrt{m^2+1}$

$y = m\,x \pm \sqrt{10}\,\sqrt{m^2+1}$

On cherche de plus les tangentes qui passent par le point $\mathrm{A}(4\,;2)$:

$2 = m \cdot 4 \pm \sqrt{10}\,\sqrt{m^2+1}$

$2 - 4\,m = \pm\sqrt{10}\,\sqrt{m^2+1}$

En élevant au carré les membres de cette égalité, on obtient :

$(2 - 4\,m)^2 = 10\,(m^2+1)$

$4 - 16\,m + 16\,m^2 = 10\,m^2 + 10$

$6\,m^2 - 16\,m - 6 = 0$

$3\,m^2 - 8\,m - 3 = 0$

$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3) = 100 = 10^2$

1) $m_1 = \frac{-(-8)+10}{2\cdot 3} = 3$

La première tangente est ainsi de la forme $y = 3\,x + h$.

Elle doit également passer par le point $\mathrm{A}(4\,;2)$:

$2 = 3 \cdot 4 + h$ implique $h = -10$.

La première tangente a donc pour équation $\boxed{y = 3\,x - 10}$.

2) $m_2 = \frac{-(-8)-10}{2\cdot 3} = -\frac{1}{3}$

La seconde tangente s'écrit ainsi $y = -\frac{1}{3}\,x + h$.

Elle doit par ailleurs passer par le point $\mathrm{A}(4\,;2)$:

$2 = -\frac{1}{3} \cdot 4 + h$ mène à $h = \frac{10}{3}$.

La seconde tangente a ainsi pour équation $y = -\frac{1}{3}\,x + \frac{10}{3}$ ou encore $\boxed{x + 3\,y - 10 = 0}$.

Calcul de l'angle entre les tangentes

Comme $m_1\,m_2 = 3 \cdot (-\frac{1}{3}) = -1$, les tangentes sont perpendiculaires : en d'autres termes, elles forment un angle de 90°.