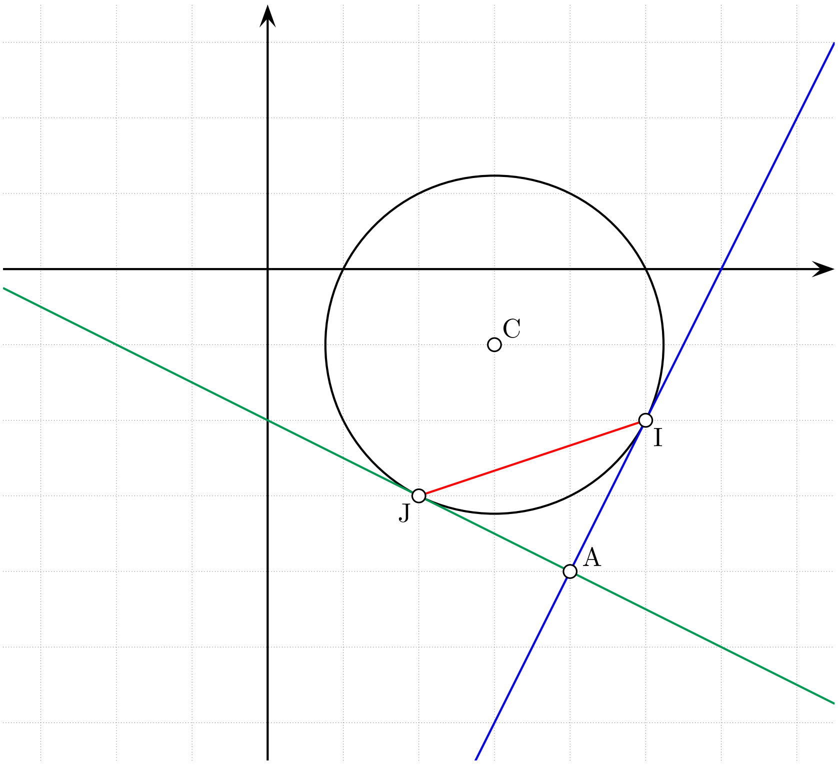
5.21



Calcul du centre et du rayon du cercle

$x^2 + y^2 = 6\,x - 2\,y - 5$

$\underbrace{x^2 - 6\,x + 9}_{(x-3)^2} - 9 + \underbrace{y^2 + 2\,y + 1}_{(y+1)^2} - 1 = -5$

$(x-3)^2 + (y+1)^2 = -5 + 9 + 1 = 5$

$\boxed{\mathrm{C}(3\,;-1)}$ et $\boxed{r = \sqrt{5}}$

Calcul des tangentes au cercle issues du point A

Les tangentes au cercle sont données par la formule :

$y + 1 = m\,(x - 3) \pm \sqrt{5}\,\sqrt{m^2 + 1}$

On recherche les tangentes passant par le point A$(4\,;-4)$:

$-4 + 1 = m\,(4 - 3) \pm \sqrt{5}\,\sqrt{m^2 + 1}$

$-3 - m = \pm\sqrt{5}\,\sqrt{m^2 + 1}$

En élevant au carré les termes de cette équation, on trouve :

$(-3 - m)^2 = 5\,(m^2 + 1)$

$9 + 6\,m + m^2 = 5\,m^2 + 5$

$0 = 4\,m^2 - 6\,m - 4$

$0 = 2\,m^2 - 3\,m - 2$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 25 = 5^2$

1) $m_1 = \frac{-(-3)+5}{2 \cdot 2} = 2$
La première tangente est de la forme $y = 2\,x + h$.
Comme elle passe par le point $\mathrm{A}(4\,;-4)$, on a :
$-4 = 2 \cdot 4 + h$, d'où l'on tire $h = -12$.
La première tangente a ainsi pour équation $y = 2\,x - 12$, c'est-à-dire $\boxed{2\,x - y - 12 = 0}$.

2) $m_2 = \frac{-(-3)-5}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{2}$
La seconde tangente est de la forme $y = -\frac{1}{2}\,x + h$.
Sachant qu'elle passe par le point $\mathrm{A}(4\,;-4)$, on obtient :
$-4 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + h$, de sorte que $h = -2$.
Par conséquent, la seconde tangente a pour équation $y = -\frac{1}{2}\,x - 2$ ou plus simplement $\boxed{x + 2\,y + 4 = 0}$.

Calcul du premier point de tangence

$\begin{cases} 2\,x - y - 12 = 0 \\ x^2 + y^2 = 6\,x - 2\,y - 5 \end{cases}$

L'équation de la tangente implique $y = 2\,x - 12$ que l'on remplace dans l'équation du cercle :

$x^2 + (2\,x - 12)^2 = 6\,x - 2\,(2\,x - 12) - 5$

$x^2 + 4\,x^2 - 48\,x + 144 = 6\,x - 4\,x + 24 - 5$

$5\,x^2 - 50\,x + 125 = 0$

$x^2 - 10\,x + 25 = 0$

$(x - 5)^2 = 0$

On en déduit $x = 5$. Il en résulte $y = 2 \cdot 5 - 12 = -2$, c'est-à-dire $\boxed{\mathrm{I}(5\,;-2)}$.

Calcul du second point de tangence

$\begin{cases} x + 2\,y + 4 = 0 \\ x^2 + y^2 = 6\,x - 2\,y - 5 \end{cases}$

L'équation de la tangente donne $x = -2\,y - 4$ que l'on substitue dans l'équation du cercle :

$(-2\,y - 4)^2 + y^2 = 6\,(-2\,y - 4) - 2\,y - 5$

$4\,y^2 + 16\,y + 16 + y^2 = -12\,y - 24 - 2\,y - 5$

$5\,y^2 + 30\,y + 45 = 0$

$y^2 + 6\,y + 9 = 0$

$(y + 3)^2 = 0$

On conclut que $y = -3$ et par suite $x = -2 \cdot (-3) - 4 = 2$, à savoir $\boxed{\mathrm{J}(2\,;-3)}$.

Calcul de la longueur de la corde IJ

$$\|\overrightarrow{\mathrm{IJ}}\| = \left\|\begin{pmatrix} 2-5 \\ -3-(-2) \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \boxed{\sqrt{10}}$$