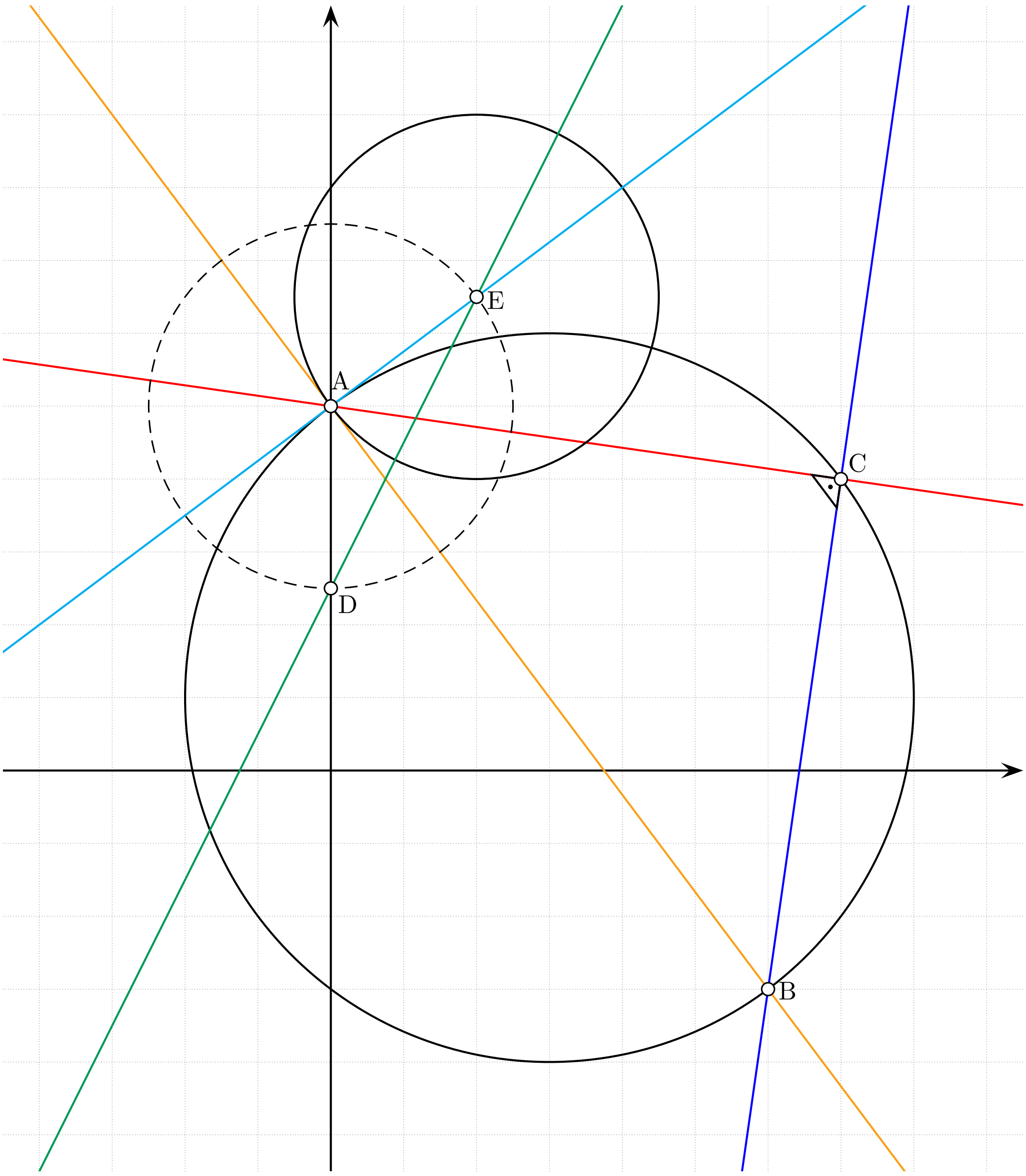
5.23



1) Le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = 7 \cdot 1 + (-1) \cdot 7 = 0$ prouve que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ sont perpendiculaires, c'est-à-dire que le triangle ABC est rectangle en C.

   Par conséquent, le cercle Γ_1 circonscrit au triangle ABC n'est autre que le cercle de Thalès de diamètre AB :
   son centre est $\mathrm{M}(\frac{0+6}{2}\,;\frac{5+(-3)}{2}) = \mathrm{M}(3\,;1)$
   et son rayon $r = \|\overrightarrow{\mathrm{MA}}\| = \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5\,.$

   L'équation du cercle Γ_1 est ainsi $\boxed{(\Gamma_1) : (x-3)^2 + (y-1)^2 = 25}$.

2) **Calcul du point** E

Le point E doit se situer d'une part sur le cercle de centre A et de rayon $2,5 = \frac{5}{2}$, d'autre part sur la droite d'équation $4\,x - 2\,y + 5 = 0$:

$\begin{cases} x^2 + (y-5)^2 = \frac{25}{4} \\ 4\,x - 2\,y + 5 = 0 \end{cases}$

L'équation de la droite donne $y = \frac{4\,x+5}{2}$ que l'on remplace dans l'équation du cercle :

$x^2 + (\frac{4\,x+5}{2} - 5)^2 = \frac{25}{4}$

$x^2 + (\frac{4\,x-5}{2})^2 - \frac{25}{4} = 0$

$x^2 + \frac{16\,x^2 - 40\,x + 25}{4} - \frac{25}{4} = 0$

$4\,x^2 + 16\,x^2 - 40\,x + 25 - 25 = 0$

$20\,x^2 - 40\,x = 0$

$x^2 - 2\,x = 0$

$x\,(x-2) = 0$

On obtient ainsi deux solutions :

(a) $x = 0$

Comme l'abscisse du point E doit être strictement positive, il s'agit de l'abscisse du point D. On calcule $y = \frac{4 \cdot 0 + 5}{2} = \frac{5}{2}$, d'où découle $\boxed{\mathrm{D}(0\,;\frac{5}{2})}$.

(b) $x = 2$

On obtient alors $y = \frac{4 \cdot 2 + 5}{2} = \frac{13}{2}$ et donc $\boxed{\mathrm{E}(2\,;\frac{13}{2})}$.

Équation du cercle Γ_2

$\boxed{(\Gamma_2) : (x-2)^2 + (y - \frac{13}{2})^2 = \frac{25}{4}}$

3) **Tangente au cercle** Γ_1 **en** A

Par définition du cercle Γ_1, on a $\mathrm{A} \in \Gamma_1$.

L'équation de la tangente au cercle Γ_1 en A est ainsi donnée par :

$(0-3)\,(x-3) + (5-1)\,(y-1) = 25$

$-3\,(x-3) + 4\,(y-1) = 25$

$-3\,x + 9 + 4\,y - 4 - 25 = 0$

$-3\,x + 4\,y - 20 = 0$

$\boxed{(t_1) : 3\,x - 4\,y + 20 = 0}$

Tangente au cercle Γ_2 **en** A

On sait que $\mathrm{A} \in \Gamma_2$ par définition du cercle Γ_2.

L'équation de la tangente au cercle Γ_2 en A est par conséquent :

$(0-2)\,(x-2) + (5 - \frac{13}{2})\,(y - \frac{13}{2}) = \frac{25}{4}$

$-2\,(x-2) - \frac{3}{2}\,(y - \frac{13}{2}) = \frac{25}{4}$

$-2\,x+4-\frac{3}{2}\,y+\frac{39}{4}-\frac{25}{4}=0$

$-2\,x-\frac{3}{2}\,y+\frac{15}{2}=0$

$\boxed{(t_2): 4\,x+3\,y-15=0}$

On remarque que $\mathrm{B} \in t_2 : 4 \cdot 6 + 3 \cdot (-3) - 15 = 0$. La tangente t_2 coïncide ainsi avec la droite AB.

Les tangentes t_1 et t_2 sont perpendiculaires

La tangente $(t_1) : 3\,x - 4\,y + 20 = 0$ admet pour vecteur directeur $\vec{t_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et pour pente $m_1 = \frac{3}{4}$.

La tangente $(t_2) : 4\,x + 3\,y - 15 = 0$ admet pour vecteur directeur $\vec{t_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et pour pente $m_2 = -\frac{4}{3}$.

Deux calculs suffisent l'un et l'autre à prouver l'orthogonalité des tangentes t_1 et t_2 :

(a) $\vec{t_1} \cdot \vec{t_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 4 \cdot 3 + 3 \cdot (-4) = 0$

(b) $m_1 \cdot m_2 = \frac{3}{4} \cdot (-\frac{4}{3}) = -1$