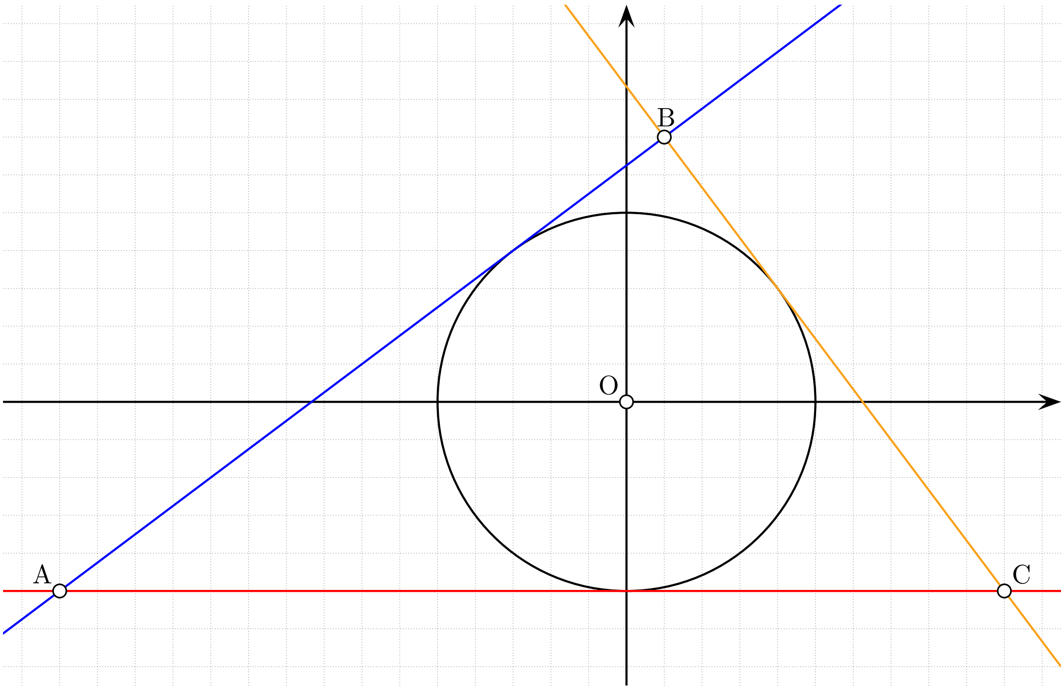
5.24



1) **Calcul de la droite AB**

Comme $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1-(-15) \\ 7-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, la droite AB est de la forme $3\,x - 4\,y + c = 0$.

On sait de plus que le point A appartient à la droite AB :
$3 \cdot (-15) - 4 \cdot (-5) + c = 0$ implique $c = 25$.

En résumé, l'équation de la droite AB est $\boxed{(AB) : 3\,x - 4\,y + 25 = 0}$.

Équation du cercle inscrit

$$r = \delta(O\,;AB) = \frac{\left|\, 3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 25 \,\right|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{25}{5} = 5$$

L'équation du cercle inscrit est par conséquent $\boxed{x^2 + y^2 = 25}$.

Calcul de la droite AC

Les tangentes de pente m au cercle inscrit sont données par la formule :
$y - 0 = m\,(x - 0) \pm\, 5\,\sqrt{m^2 + 1}$
$y = m\,x \pm\, 5\,\sqrt{m^2 + 1}$

On recherche les tangentes issues du point $A(-15\,;-5)$:
$-5 = m \cdot (-15) \pm\, 5\,\sqrt{m^2 + 1}$
$15\,m - 5 = \pm 5\,\sqrt{m^2 + 1}$
$3\,m - 1 = \pm\sqrt{m^2 + 1}$

En élevant au carré les termes de cette égalité, on obtient :

$(3\,m-1)^2=m^2+1$
$9\,m^2-6\,m+1=m^2+1$
$8\,m^2-6\,m=0$
$2\,m\,(4\,m-3)=0$
On obtient ainsi deux solutions : $m_1=0$ et $m_2=\frac{3}{4}$.
Comme la seconde pente $m_2=\frac{3}{4}$ correspond à la pente de la droite AB, on déduit que la première pente $m_1=0$ correspond à la pente de la droite AC.
La droite AC est ainsi de la forme $y=0\,x+h$, c'est-à-dire $y=h$.
Puisque la droite AC passe par le point $\mathrm{A}(-15\,;-5)$, on a : $-5=h$.
On conclut que la droite AC a pour équation $y=-5$, ou si l'on préfère $\boxed{(\mathrm{AC}):y+5=0}$.

Calcul de la droite BC
Les tangentes de pente m au cercle inscrit sont données par la formule :
$y=m\,x\pm 5\sqrt{m^2+1}$

On recherche les tangentes issues du point $\mathrm{B}(1\,;7)$:
$7=m\cdot 1\pm 5\sqrt{m^2+1}$
$7-m=\pm 5\sqrt{m^2+1}$

En élevant au carré les membres de cette équation, on trouve :
$(7-m)^2=25\,(m^2+1)$
$49-14\,m+m^2=25\,m^2+25$
$0=24\,m^2+14\,m-24$
$0=12\,m^2+7\,m-12$
$\Delta=7^2-4\cdot 12\cdot(-12)=625=25^2$
On obtient dès lors deux solutions : $m_1=\frac{-7+25}{2\cdot 12}=\frac{3}{4}$ et $m_2=\frac{-7-25}{2\cdot 12}=-\frac{4}{3}$.
Comme la première pente $m_1=\frac{3}{4}$ est celle de la droite AB, la seconde pente $m_2=-\frac{4}{3}$ est celle de la droite BC.
La droite BC est par conséquent de la forme $y=-\frac{4}{3}\,x+h$.
On sait en outre qu'elle passe par le point $\mathrm{B}(1\,;7)$:
$7=-\frac{4}{3}\cdot 1+h$ fournit $h=\frac{25}{3}$.
En définitive, l'équation de la droite BC est $y=-\frac{4}{3}\,x+\frac{25}{3}$ ou plus simplement $\boxed{(\mathrm{BC}):4\,x+3\,y-25=0}$.

Calcul du point $\mathrm{C}=\mathrm{AC}\cap\mathrm{BC}$
$$\begin{cases} y+5=0 \\ 4\,x+3\,y-25=0 \end{cases}$$
La première équation délivre immédiatement $y=-5$ que l'on remplace dans la seconde équation : $4\,x+3\cdot(-5)-25=0$ donne $x=10$.
On conclut $\boxed{\mathrm{C}(10\,;-5)}$.

2) **Aire du triangle** ABC **(1^{re} méthode)**

$\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\| = \left\|\begin{pmatrix}16\\12\end{pmatrix}\right\| = \left\|4\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\right\| = |4|\,\left\|\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\right\| = 4\sqrt{4^2+3^2} = 4\cdot 5 = 20$

$\delta(\mathrm{C}\,;\mathrm{AB}) = \dfrac{|\,3\cdot 10 - 4\cdot(-5) + 25\,|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \dfrac{75}{5} = 15$

$\mathcal{A} = \dfrac{20\cdot 15}{2} = 150$

Aire du triangle ABC **(2^e méthode)**

La valeur absolue du déterminant des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix}16\\12\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix}25\\0\end{pmatrix}$ donne l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

$\mathcal{A} = \left|\,\frac{1}{2}\begin{vmatrix}16 & 25\\ 12 & 0\end{vmatrix}\,\right| = \left|\,\frac{1}{2}\,(16\cdot 0 - 12\cdot 25)\,\right| = \left|\,\frac{1}{2}\cdot(-300)\,\right| = |-150| = 150$