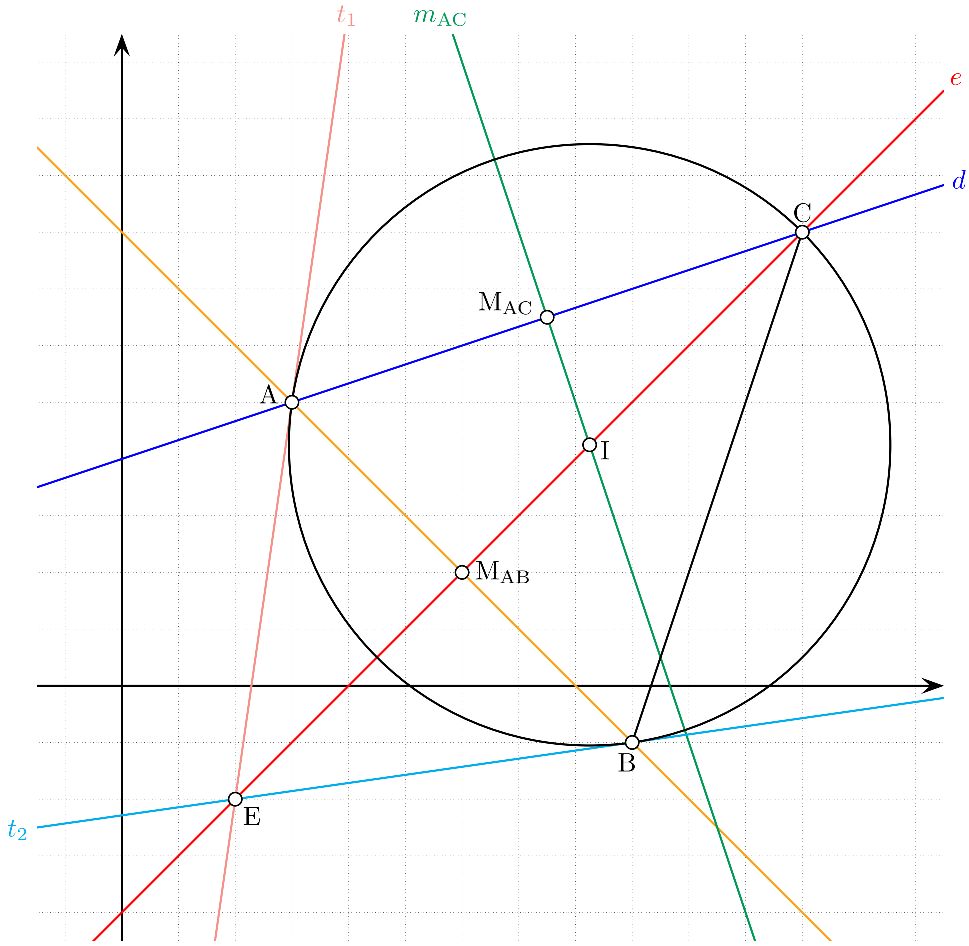
5.25



1) **Calcul du point** $\mathrm{C} = d \cap e$

$$\begin{cases} x - 3\,y + 12 = 0 \\ x - y - 4 = 0 \end{cases}$$

En soustrayant la première équation de la seconde, on obtient $2\,y - 16 = 0$, c'est-à-dire $y = 8$.

En remplaçant $y = 8$ dans la seconde équation, on a $x - 8 - 4 = 0$, d'où suit $x = 12$.

On conclut $\boxed{\mathrm{C}(12\,;8)}$.

Calcul de la droite AB

La droite $(e) : x - y - 4$ admet pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vu que la droite AB est perpendiculaire à la droite e, elle est de la forme $x + y + c = 0$.

Étant donné que le point $\mathrm{A}(3\,;5)$ appartient à la droite AB, on doit avoir : $3 + 5 + c = 0$, d'où l'on tire $c = -8$.

En résumé, l'équation de la droite AB est $\boxed{(\mathrm{AB}) : x + y - 8 = 0}$.

Calcul du point $\mathrm{M_{AB}} = e \cap \mathrm{AB}$

$$\begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ x + y - 8 = 0 \end{cases}$$

L'addition de ces équations délivre $2\,x - 12 = 0$, à savoir $x = 6$.

La soustraction de ces équations mène à $2\,y - 4 = 0$, c'est-à-dire $y = 2$.

En résumé, on a obtenu $\boxed{\mathrm{M_{AB}}(6\,;2)}$.

Calcul du point B

Puisque le point $\mathrm{M_{AB}}$ est le milieu des points A et B, il suit que :

$$\mathrm{M_{AB}}(6\,;2) = \left(\tfrac{3+b_1}{2}\,;\tfrac{5+b_2}{2}\right) \iff \begin{cases} 6 = \frac{3+b_1}{2} \\ 2 = \frac{5+b_2}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} 9 = b_1 \\ -1 = b_2 \end{cases}$$

En définitive, on a $\boxed{\mathrm{B}(9\,;-1)}$.

2) Le centre du cercle circonscrit au triangle ABC se situe à l'intersection des médiatrices de ce triangle.

Calcul de la médiatrice m_{AC}

Puisque la médiatrice m_{AC} est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, elle est de la forme $3\,x + y + c = 0$.

Elle doit par ailleurs passer par le milieu des points A et C, à savoir $\mathrm{M_{AC}}\left(\frac{3+12}{2}\,;\frac{5+8}{2}\right) = \mathrm{M_{AC}}\left(\frac{15}{2}\,;\frac{13}{2}\right)$:

$3 \cdot \frac{15}{2} + \frac{13}{2} + c = 0$ implique $c = -29$.

La médiatrice m_{AC} a ainsi pour équation $\boxed{(m_{\mathrm{AC}}) : 3\,x + y - 29 = 0}$.

Calcul du centre du cercle circonscrit $\mathrm{I} = e \cap m_{\mathrm{AC}}$

$$\begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ 3\,x + y - 29 = 0 \end{cases}$$

La somme de ces équations donne $4\,x - 33 = 0$, d'où l'on tire $x = \frac{33}{4}$.

Par suite, la première équation implique $y = x - 4 = \frac{33}{4} - 4 = \frac{17}{4}$.

Le centre du cercle circonscrit est ainsi $\boxed{\mathrm{I}\left(\frac{33}{4}\,;\frac{17}{4}\right)}$.

Équation du cercle circonscrit Γ

L'équation du cercle circonscrit est de la forme $(x - \frac{33}{4})^2 + (y - \frac{17}{4})^2 = r^2$.

On sait que le cercle circonscrit passe par le point $\mathrm{A}(3\,;5)$:

$(3 - \frac{33}{4})^2 + (5 - \frac{17}{4})^2 = (-\frac{21}{4})^2 + (\frac{3}{4})^2 = \frac{441}{16} + \frac{9}{16} = \frac{450}{16} = \frac{225}{8} = r^2$

On conclut que l'équation du cercle circonscrit est :

$\boxed{(\Gamma) : (x - \frac{33}{4})^2 + (y - \frac{17}{4})^2 = \frac{225}{8}}$.

3) **Calcul de la tangente** t_1

Puisque A $\in \Gamma$, l'équation de la tangente t_1 est donnée par :

$(3 - \frac{33}{4})\,(x - \frac{33}{4}) + (5 - \frac{17}{4})\,(y - \frac{17}{4}) = \frac{225}{8}$

$-\frac{21}{4}\,(x - \frac{33}{4}) + \frac{3}{4}\,(y - \frac{17}{4}) = \frac{225}{8}$

$-\frac{21}{4}\,x + \frac{693}{16} + \frac{3}{4}\,y - \frac{51}{16} = \frac{225}{8}$

$-\frac{21}{4}\,x + \frac{3}{4}\,y + \underbrace{\frac{693}{16} - \frac{51}{16} - \frac{225}{8}}_{12} = 0$

$\boxed{(t_1) : 7\,x - y - 16 = 0}$

Calcul de la tangente t_2

Sachant que B $\in \Gamma$, l'équation de la tangente t_2 est donnée par :

$(9 - \frac{33}{4})\,(x - \frac{33}{4}) + (-1 - \frac{17}{4})\,(y - \frac{17}{4} = \frac{225}{8}$

$\frac{3}{4}\,(x - \frac{33}{4}) - \frac{21}{4}\,(y - \frac{17}{4}) = \frac{225}{8}$

$\frac{3}{4}\,x - \frac{99}{16} - \frac{21}{4}\,y + \frac{357}{16} = \frac{225}{8}$

$\frac{3}{4}\,x - \frac{21}{4}\,y + \underbrace{(-\frac{99}{16}) + \frac{357}{16} - \frac{225}{8}}_{(-12)} = 0$

$\boxed{(t_2) : x - 7\,y - 16 = 0}$

4) **Calcul du point** $\text{E} = t_1 \cap t_2$

$$\begin{cases} 7\,x - y - 16 = 0 \\ x - 7\,y - 16 = 0 \end{cases}$$

La première équation donne $y = 7\,x - 16$ que l'on substitue dans la seconde :

$x - 7\,(7\,x - 16) - 16 = 0$ conduit à $x = 2$.

Dès lors, on obtient $y = 7 \cdot 2 - 16 = -2$ et $\boxed{\text{E}(2\,;-2)}$.

Les tangentes t_1 **et** t_2 **se coupent sur la droite** e

Il suffit de s'assurer que les coordonnées du point E vérifient l'équation de la droite e : $2 - (-2) - 4 = 0$.