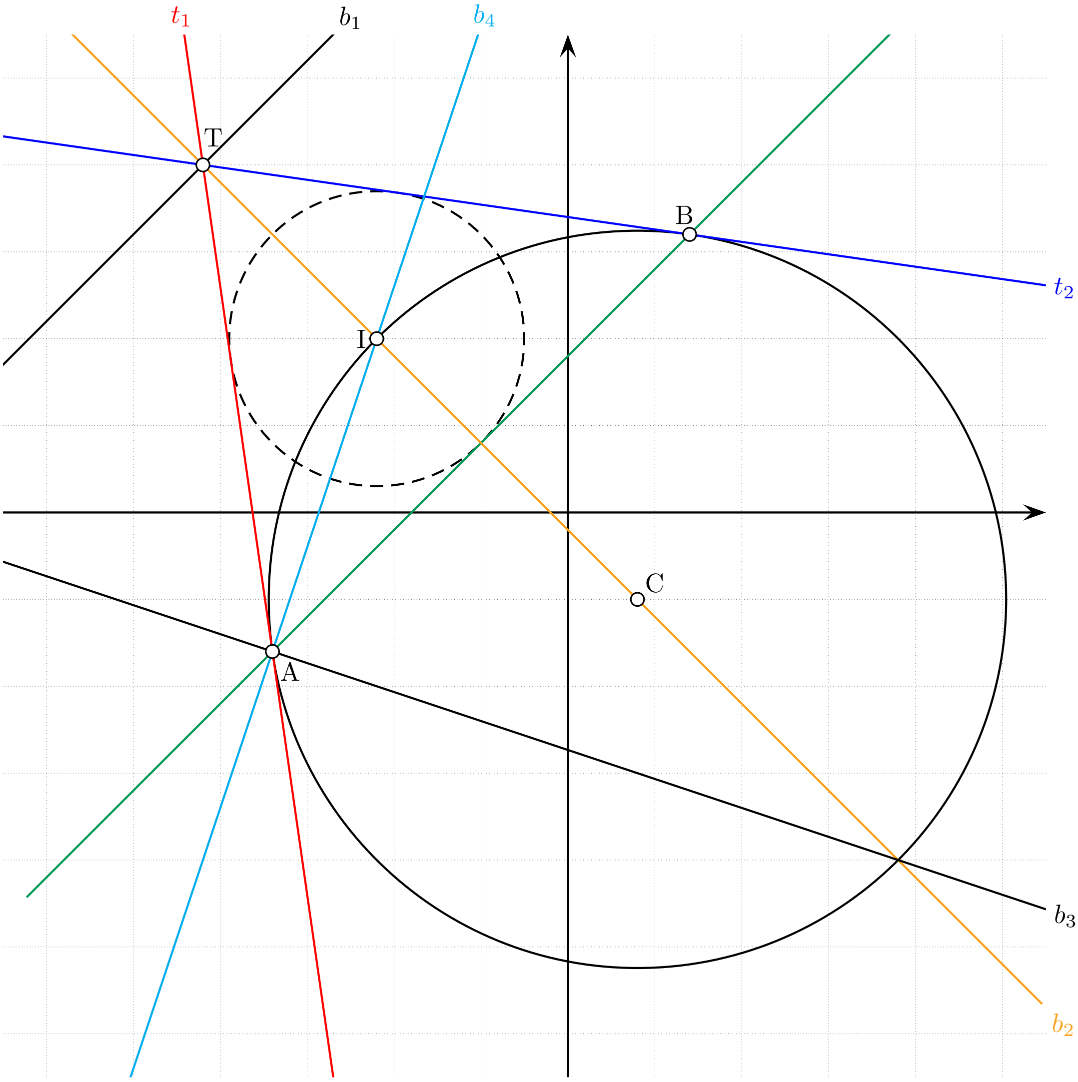
5.26



1) **Équation du cercle Γ**

Le cercle Γ ayant pour centre $\mathrm{C}(4\,;-5)$ et pour rayon $r = 15\sqrt{2}$, son équation est $\boxed{(\Gamma) : (x-4)^2 + (y+5)^2 = 450}$.

Tangentes au cercle Γ issues du point T

Les tangentes de pente m au cercle Γ sont données par la formule :
$y + 5 = m\,(x-4) \pm 15\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}$

On recherche les tangentes passant par le point $\mathrm{T}(-21\,;20)$:
$20 + 5 = m\,(-21-4) \pm 15\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}$
$25 = -25\,m \pm 15\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}$
$25 + 25\,m = \pm 15\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}$
$5 + 5\,m = \pm 3\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}$

En élevant au carré les membres de cette égalité, on obtient :

$(5+5\,m)^2 = 9 \cdot 2\,(m^2+1)$

$25 + 50\,m + 25\,m^2 = 18\,m^2 + 18$

$7\,m^2 + 50\,m + 7 = 0$

$\Delta = 50^2 - 4 \cdot 7 \cdot 7 = 2304 = 48^2$

(a) $m_1 = \frac{-50-48}{2\cdot 7} = -7$
L'équation de la première tangente est donc de la forme $y = -7\,x + h$.
Elle doit en outre passer par le point $\mathrm{T}(-21\,;20)$:
$20 = -7 \cdot (-21) + h$ implique $h = -127$.
L'équation de la première tangente est ainsi $y = -7\,x - 127$, c'est-à-dire $\boxed{(t_1) : 7\,x + y + 127 = 0}$.

(b) $m_2 = \frac{-50+48}{2\cdot 7} = -\frac{1}{7}$
L'équation de la seconde tangente est ainsi de la forme $y = -\frac{1}{7}\,x + h$.
On sait qu'elle doit également passer par le point $\mathrm{T}(-21\,;20)$:
$20 = -\frac{1}{7} \cdot (-21) + h$ donne $h = 17$.
L'équation de la seconde tangente est par conséquent $y = -\frac{1}{7}\,x + 17$ ou encore $\boxed{(t_2) : x + 7\,y - 119 = 0}$.

Calcul du point $\mathrm{A} = t_1 \cap \Gamma$

$\begin{cases} 7\,x + y + 127 = 0 \\ (x-4)^2 + (y+5)^2 = 450 \end{cases}$

L'équation de la tangente implique $y = -7\,x - 127$ que l'on substitue dans l'équation du cercle :

$(x-4)^2 + \big((-7\,x - 127) + 5\big)^2 = 450$

$(x-4)^2 + (-7\,x - 122)^2 - 450 = 0$

$x^2 - 8\,x + 16 + 49\,x^2 + 1708\,x + 14884 - 450 = 0$

$50\,x^2 + 1700\,x + 14450 = 0$

$x^2 + 34\,x + 289 = 0$

$(x+17)^2 = 0$

On conclut que $x = -17$.

Par suite, $y = -7 \cdot (-17) - 127 = -8$ et on a donc $\boxed{\mathrm{A}(-17\,;-8)}$.

Calcul du point $\mathrm{B} = t_2 \cap \Gamma$

$\begin{cases} x + 7\,y - 119 = 0 \\ (x-4)^2 + (y+5)^2 = 450 \end{cases}$

L'équation de la tangente donne $x = -7\,y + 119$ que l'on remplace dans l'équation du cercle :

$\big((-7\,y + 119) - 4\big)^2 + (y+5)^2 = 450$

$(-7\,y + 115)^2 + (y+5)^2 - 450 = 0$

$49\,y^2 - 1610\,y + 13225 + y^2 + 10\,y + 25 - 450 = 0$

$50\,y^2 - 1600\,y + 12800 = 0$

$y^2 - 32\,y + 256 = 0$

$(y - 16)^2 = 0$

On obtient par conséquent $y = 16$.

Il en résulte $x = -7 \cdot 16 + 119 = 7$ et aussi $\boxed{\mathrm{B}(7\,;16)}$.

2) **Calcul de la droite** AB

Comme $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 24 \\ 24 \end{pmatrix} = 24 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, l'équation de la droite AB est donnée par :

$$0 = \begin{vmatrix} x + 17 & 1 \\ y + 8 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (x + 17) - 1 \cdot (y + 8) = x - y + 9$$

On a ainsi obtenu $\boxed{(\mathrm{AB}) : x - y + 9 = 0}$.

Calcul des bissectrices des droites t_1 **et** t_2

$$\frac{7\,x + y + 127}{\sqrt{7^2 + 1^2}} = \pm \frac{x + 7\,y - 119}{\sqrt{1^2 + 7^2}}$$

(a) $7\,x + y + 127 = x + 7\,y - 119$ donne $6\,x - 6\,y + 246 = 0$, c'est-à-dire $\boxed{(b_1) : x - y + 41 = 0}$.

(b) $7\,x + y + 127 = -(x + 7\,y - 119)$ fournit $8\,x + 8\,y + 8 = 0$, à savoir $\boxed{(b_2) : x + y + 1 = 0}$.

Calcul des bissectrices des droites t_1 **et** AB

$$\frac{7\,x + y + 127}{\underbrace{\sqrt{7^2 + 1^2}}_{5\sqrt{2}}} = \pm \frac{x - y + 9}{\underbrace{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}_{\sqrt{2}}} \iff 7\,x + y + 127 = \pm\,5\,(x - y + 9)$$

(a) $7\,x + y + 127 = 5\,(x - y + 9)$ mène à $2\,x + 6\,y + 82 = 0$ ou plus simplement $\boxed{(b_3) : x + 3\,y + 41 = 0}$.

(b) $7\,x + y + 127 = -5\,(x - y + 9)$ délivre $12\,x - 4\,y + 172 = 0$, d'où suit $\boxed{(b_4) : 3\,x - y + 43 = 0}$.

Calcul du point $\mathrm{I} = b_2 \cap b_4$

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 3\,x - y + 43 = 0 \end{cases}$$

L'addition de ces équations donne $4\,x + 44 = 0$, d'où suit $x = -11$.

En remplaçant $x = -11$ dans la première équation, on trouve :

$-11 + y + 1 = 0$, de sorte que $y = 10$.

On a ainsi obtenu $\boxed{\mathrm{I}(-11\,;10)}$.

3) $I \in \Gamma$

Il suffit de s'assurer que les coordonnées du point $I(-11\,;10)$ vérifient l'équation du cercle Γ :

$(-11-4)^2+(10+5)^2=(-15)^2+15^2=225+225=450$