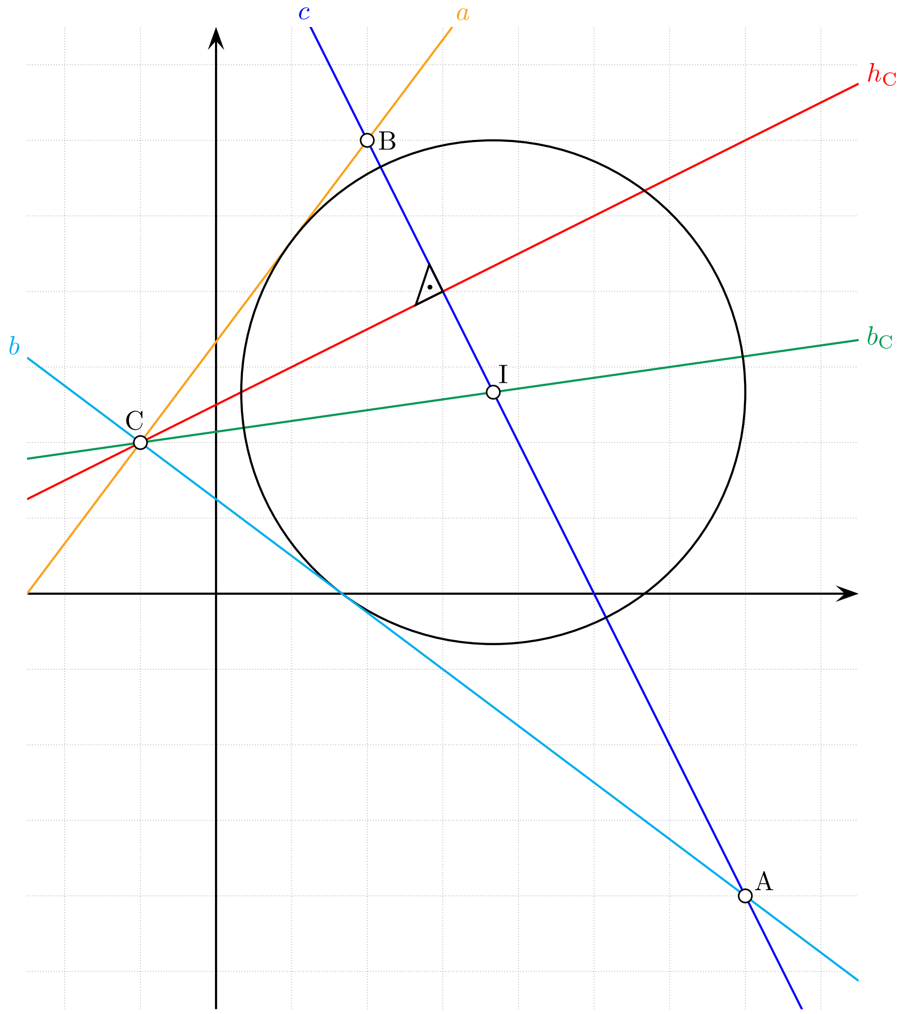
5.27



Calcul du point $C = h_C \cap b_C$

$$\begin{cases} x - 2\,y + 5 = 0 \\ x - 7\,y + 15 = 0 \end{cases}$$

En soustrayant la seconde équation de la première, on obtient $5\,y - 10 = 0$, d'où découle $y = 2$.

En substituant $y = 2$ dans la première équation, on a $x - 2 \cdot 2 + 5 = 0$, si bien que $x = -1$ et $\boxed{C(-1\,;2)}$.

Calcul de la droite c

Comme la droite c est perpendiculaire à la hauteur $(h_C) : x - 2\,y + 5 = 0$, elle est de la forme $(c) : 2\,x + y + c = 0$.

Par ailleurs, la droite c doit passer par le point $B(2\,;6)$:

$2 \cdot 2 + 6 + c = 0$ implique $c = -10$.

En résumé, la droite c a pour équation $\boxed{(c) : 2\,x + y - 10 = 0}$.

Calcul de la droite a

Comme $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$, la droite a est de la forme $4\,x - 3\,y + c = 0$.

Elle doit en outre passer par le point $\mathrm{B}(2\,;6)$:

$4 \cdot 2 - 3 \cdot 6 + c = 0$ donne $c = 10$.

La droite a a ainsi pour équation $\boxed{(a) : 4\,x - 3\,y + 10 = 0}$.

Calcul du point $\mathrm{I} = b_{\mathrm{C}} \cap c$

$$\begin{cases} x - 7\,y + 15 = 0 \\ 2\,x + y - 10 = 0 \end{cases}$$

La seconde équation implique $y = -2\,x + 10$ que l'on remplace dans la première : $x - 7\,(-2\,x + 10) + 15 = 0$ fournit $x = \frac{11}{3}$.

On en déduit $y = -2 \cdot \frac{11}{3} + 10 = \frac{8}{3}$ et $\boxed{\mathrm{I}(\frac{11}{3}\,;\frac{8}{3})}$.

Calcul du cercle Γ centré en I et tangent à la droite a

Le cercle Γ est centré en $\mathrm{I}(\frac{11}{3}\,;\frac{8}{3})$ et son rayon vaut :

$$r = \delta(\mathrm{I}\,;a) = \frac{\left|4 \cdot \frac{11}{3} - 3 \cdot \frac{8}{3} + 10\right|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{\frac{50}{3}}{5} = \frac{10}{3}$$

L'équation du cercle Γ est ainsi $\boxed{(\Gamma) : (x - \frac{11}{3})^2 + (y - \frac{8}{3})^2 = \frac{100}{9}}$.

Calcul de la droite b

La droite b est une tangente au cercle Γ issue du point C.

Elle s'obtient par conséquent grâce à la formule :

$2 - \frac{8}{3} = m\,(-1 - \frac{11}{3}) \pm \frac{10}{3}\sqrt{m^2 + 1}$

$\frac{14}{3}\,m - \frac{2}{3} = \pm\,\frac{10}{3}\sqrt{m^2 + 1}$

$7\,m - 1 = \pm\,5\sqrt{m^2 + 1}$

En élevant au carré les membres de cette équation, on a :

$(7\,m - 1)^2 = 25\,(m^2 + 1)$

$49\,m^2 - 14\,m + 1 = 25\,m^2 + 25$

$24\,m^2 - 14\,m - 24 = 0$

$12\,m^2 - 7\,m - 12 = 0$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-12) = 625 = 25^2$

1) $m_1 = \frac{-(-7)+25}{2 \cdot 12} = \frac{4}{3}$

   Il s'agit de la pente de la droite a dont on connaît déjà l'équation.

2) $m_2 = \frac{-(-7)-25}{2 \cdot 12} = -\frac{3}{4}$

   La droite b s'écrit donc sous la forme $y = -\frac{3}{4}\,x + h$.

   Elle doit par ailleurs passer par le point $\mathrm{C}(-1\,;2)$:

   $2 = -\frac{3}{4} \cdot (-1) + h$ délivre $h = \frac{5}{4}$.

   La droite b a ainsi pour équation $y = -\frac{3}{4}\,x + \frac{5}{4}$ ou plus simplement $\boxed{(b) : 3\,x + 4\,y - 5 = 0}$.

Calcul de la droite b : 2^e méthode

Les angles formés d'un côté par les droites a et b_{C} et d'un autre côté par les droites b_{C} et b sont égaux.

Si m désigne la pente de la droite b, on a donc : $\dfrac{\frac{4}{3}-\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{7}\cdot\frac{4}{3}} = \dfrac{\frac{1}{7}-m}{1+m\cdot\frac{1}{7}}$.

Il en résulte $1 = \dfrac{1-7\,m}{7+m}$, c'est-à-dire $7+m = 1-7\,m$, d'où suit $m = -\frac{3}{4}$.

La droite b est ainsi de la forme $y = -\frac{3}{4}\,x + h$. Vu qu'elle passe par le point $\mathrm{C}(-1\,;2)$, on doit avoir $2 = -\frac{3}{4}\cdot(-1)+h$, si bien que $h = \frac{5}{4}$.

On conclut à l'équation $(b) : y = -\frac{3}{4}\,x + \frac{5}{4}$ ou encore $\boxed{(b) : 3\,x + 4\,y - 5 = 0}$.

Calcul du point $\mathrm{A} = b \cap c$

$$\begin{cases} 3\,x + 4\,y - 5 = 0 \\ 2\,x + \,y - 10 = 0 \end{cases}$$

La seconde équation donne $y = -2\,x + 10$ que l'on substitue dans la première : $3\,x + 4\,(-2\,x+10) - 5 = 0$, si bien que $x = 7$.

On en infère $y = -2\cdot 7 + 10 = -4$ et on conclut $\boxed{\mathrm{A}(7\,;-4)}$.