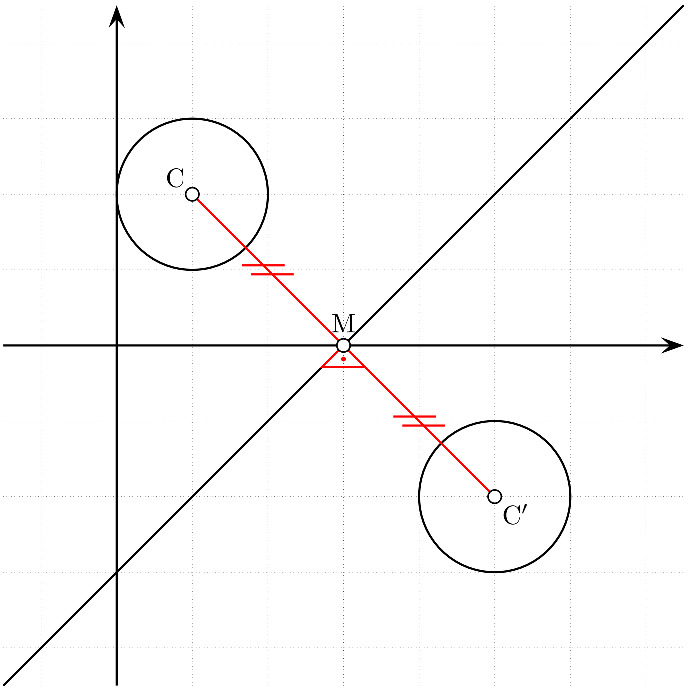
5.3



Calcul du centre et du rayon du cercle de l'énoncé

$x^2 + y^2 - 2\,x - 4\,y + 4 = 0$

$\underbrace{x^2 - 2\,x + 1}_{(x-1)^2} - 1 + \underbrace{y^2 - 4\,y + 4}_{(y-2)^2} - 4 + 4 = 0$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$

$\boxed{\mathrm{C}(1\,;2)}$ $\boxed{r = 1}$

Calcul de la droite $\mathrm{CC'}$

La droite $\mathrm{CC'}$ est perpendiculaire à la droite $x - y - 3 = 0$, qui admet $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur. Aussi est-elle de la forme $(\mathrm{CC'}) : x + y + c = 0$.

En outre, on sait que la droite $\mathrm{CC'}$ passe par le point $\mathrm{C}(1\,;2)$:

$1 + 2 + c = 0$ implique $c = -3$.

Par conséquent, l'équation de la droite $\mathrm{CC'}$ est : $\boxed{(\mathrm{CC'}) : x + y - 3 = 0}$.

Calcul du point M

$\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$

L'addition de ces deux équations donne $2\,x - 6 = 0$, d'où l'on tire $x = 3$; leur soustraction délivre $2\,y = 0$, c'est-à-dire $y = 0$.

On a donc obtenu $\boxed{\mathrm{M}(3\,;0)}$.

Calcul du point C′

Posons $C'(c'_1\,;c'_2)$. Comme le point M est le milieu des points C et C′, on a :
$M(3\,;0)=\left(\frac{1+c'_1}{2}\,;\frac{2+c'_2}{2}\right)$ d'où l'on déduit :

$$\begin{cases} 3=\frac{1+c'_1}{2} \iff 6=1+c'_1 \iff 5=c'_1 \\ 0=\frac{2+c'_2}{2} \iff 0=2+c'_2 \iff -2=c'_2 \end{cases}$$

On conclut à $\boxed{C'(5\,;-2)}$.

Équation du cercle symétrique

Puisque toute symétrie préserve les longueurs, le rayon du cercle symétrique vaut également 1. Comme son centre est $C'(5\,;-2)$, son équation est donnée par : $\boxed{(x-5)^2+(y+2)^2=1}$.