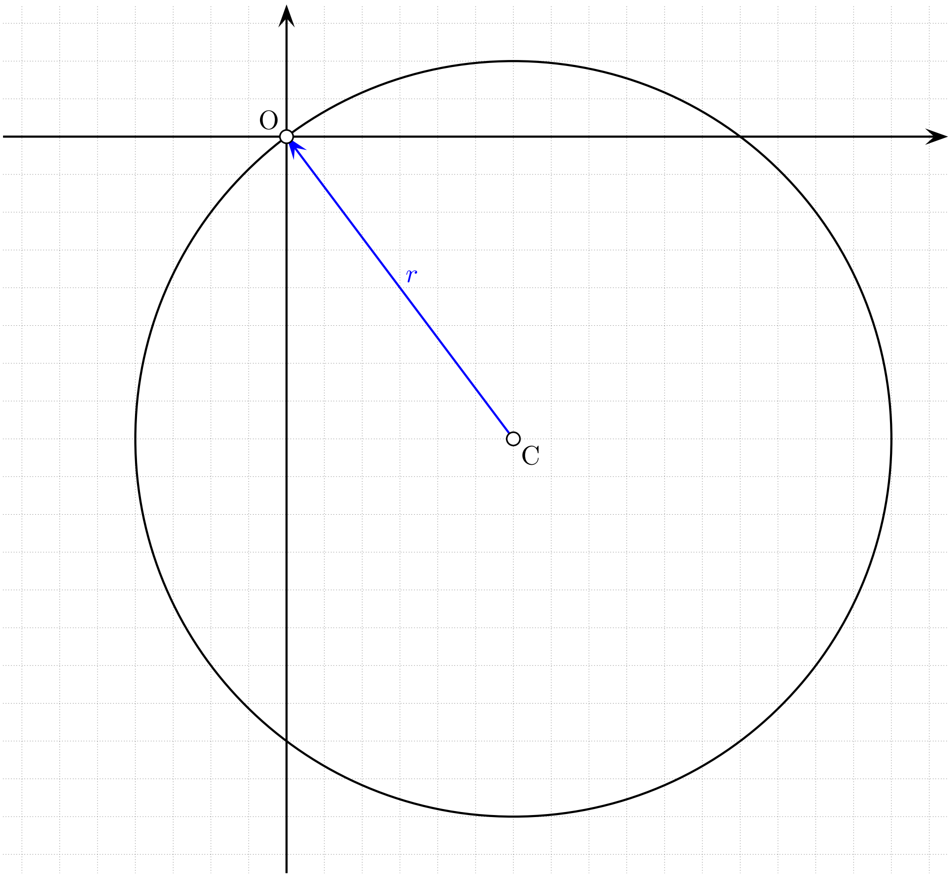
5.4 1) L'équation du cercle est évidente :

$(x-0)^2+(y-0)^2=3^2$ c'est-à-dire $\boxed{x^2+y^2=9}$.

2) L'équation du cercle est triviale :

$(x-2)^2+\big(y-(-3)\big)^2=7^2$, ce qui donne $\boxed{(x-2)^2+(y+3)^2=49}$.

3)



Le rayon du cercle est vaut $r=\delta(\mathrm{C}\,;\mathrm{O})=\|\overrightarrow{\mathrm{CO}}\|=\left\|\begin{pmatrix}0-6\\0-(-8)\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}-6\\8\end{pmatrix}\right\|=\left\|2\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}\right\|=|2|\sqrt{(-3)^2+4^2}=2\sqrt{25}=2\cdot 5=10.$

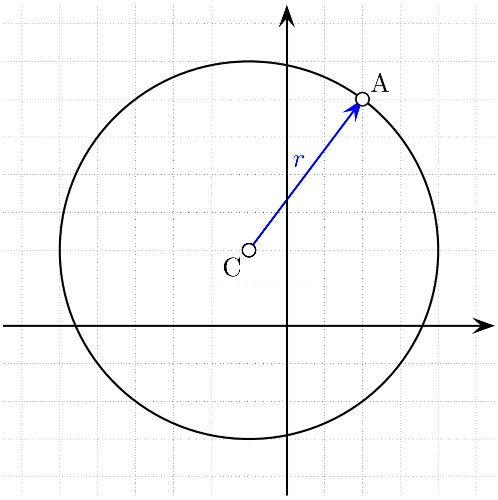
L'équation du cercle est donc $(x-6)^2+\big(y-(-8)\big)^2=10^2$, à savoir $\boxed{(x-6)^2+(y+8)^2=100}$.

Autre méthode

Puisque le cercle a pour centre $\mathrm{C}(6\,;-8)$, son équation est de la forme $(x-6)^2+(y+8)^2=r^2$.

Vu que le point $\mathrm{O}(0\,;0)$ appartient au cercle, ses coordonnées doivent vérifier son équation : $(0-6)^2+(0+8)^2=6^2+8^2=36+64=100=r^2$.

On obtient donc aussi l'équation du cercle $\boxed{(x-6)^2+(y+8)^2=100}$.

4) 

Le rayon du cercle est $r = \delta(\mathrm{C}\,;\mathrm{A}) = \|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\| = \left\|\begin{pmatrix}2-(-1)\\6-2\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$.

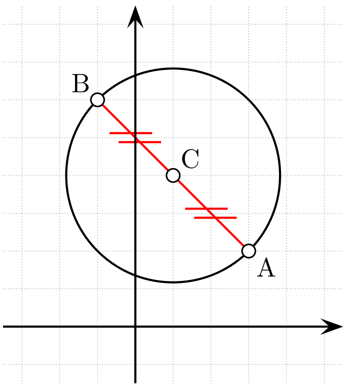
Par conséquent, l'équation du cercle est $\big(x-(-1)\big)^2 + (y-2)^2 = 5^2$, c'est-à-dire $\boxed{(x+1)^2+(y-2)^2 = 25}$.

Autre méthode

Comme le cercle a pour centre $\mathrm{C}(-1\,;2)$, son équation est de la forme $(x+1)^2+(y-2)^2 = r^2$.

De plus, le cercle passe par le point $\mathrm{A}(2\,;6)$: $(2+1)^2+(6-2)^2 = 3^2+4^2 = 9+16 = 25 = r^2$.

L'équation du cercle est ainsi $\boxed{(x+1)^2+(y-2)^2 = 25}$.

5) 

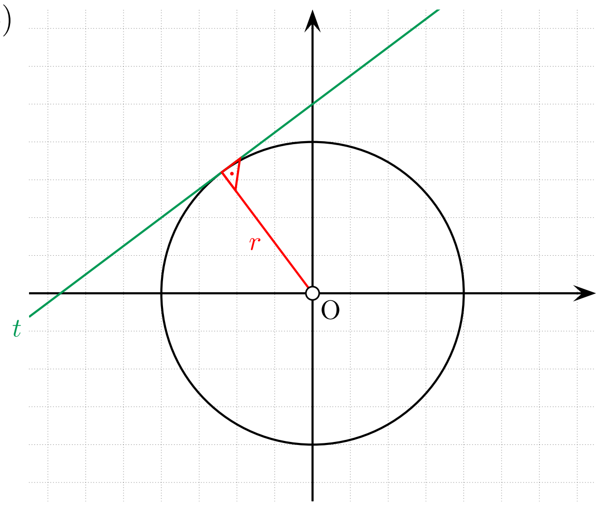
Le centre du cercle C est le milieu des points A et B :
$\mathrm{C}\big(\frac{3+(-1)}{2}\,;\frac{2+6}{2}\big) = \mathrm{C}(1\,;4)$.

Le diamètre vaut $\delta(\mathrm{A}\,;\mathrm{B}) = \|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\| = \left\|\begin{pmatrix}-1-3\\6-2\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}\right\| =$

$$\left\| 4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = |4| \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = 4\sqrt{2}.$$

Puisque le diamètre mesure $4\sqrt{2}$, le rayon vaut $\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

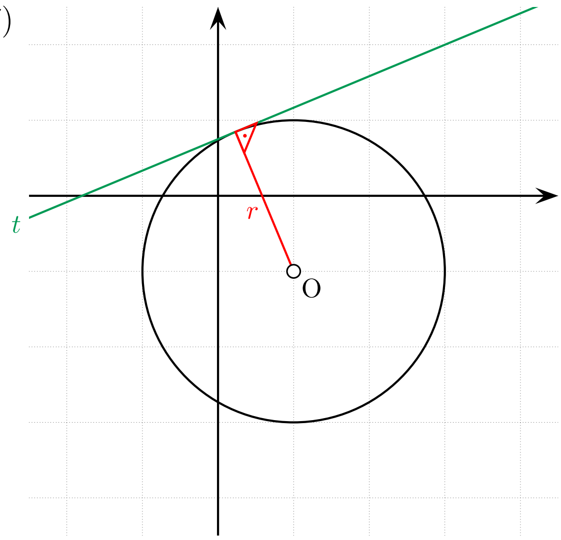
L'équation du cercle est par conséquent $(x-1)^2 + (y-4)^2 = (2\sqrt{2})^2$, c'est-à-dire $\boxed{(x-1)^2 + (y-4)^2 = 8}$.

6) 

Le rayon du cercle s'obtient en calculant la distance entre le centre du cercle et la tangente :

$$r = \delta(\mathrm{C}\,;t) = \frac{\left| 3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 20 \right|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|20|}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4$$

L'équation du cercle est dès lors $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 4^2$, c'est-à-dire $\boxed{x^2 + y^2 = 16}$.

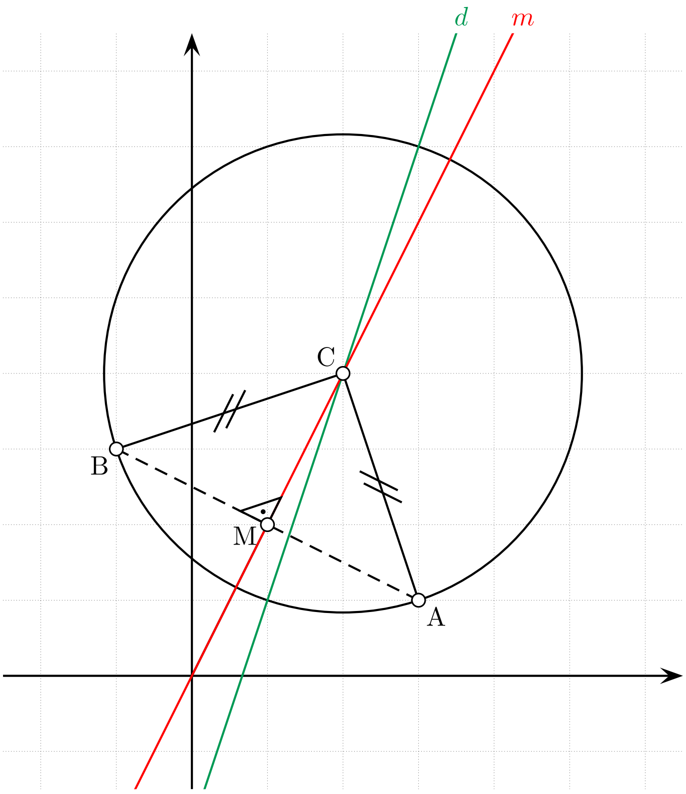
7) 

Le rayon du cercle s'obtient en calculant la distance entre le centre du cercle et la tangente :

$$r = \delta(\mathrm{C}\,;t) = \frac{\left|\,5\cdot 1 - 12\cdot(-1) + 9\,\right|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}} = \frac{|26|}{\sqrt{169}} = \frac{26}{13} = 2$$

C'est pourquoi, l'équation du cercle est $(x-1)^2 + \big(y-(-1)\big)^2 = 2^2$, à savoir $\boxed{(x-1)^2+(y+1)^2=4}$.

8)



Le centre du cercle C se situe à la même distance (égale au rayon) des points A et B. Or le lieu géométrique des points équidistants de A et B est la médiatrice des points A et B. Par conséquent, le point C se situe sur la médiatrice des points A et B.

Calcul de la médiatrice de A **et** B

Comme $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -1-3 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, la médiatrice m, perpendiculaire au segment AB, est de la forme $(m) : -2\,x + y + c = 0$.

Par ailleurs, elle doit passer par le milieu des points A et B, à savoir $\mathrm{M}(\frac{3+(-1)}{2}\,;\frac{1+3}{2}) = \mathrm{M}(1\,;2)$: $-2\cdot 1 + 2 + c = 0$ implique $c = 0$.

L'équation de la médiatrice de A et B est donc $\boxed{(m) : -2\,x + y = 0}$.

Calcul du centre du cercle $\mathrm{C} = m \cap d$

$$\begin{cases} -2\,x + y \phantom{{}-2} = 0 \\ 3\,x - y - 2 = 0 \end{cases}$$

En additionnant ces deux équations, on obtient $x - 2 = 0$, à savoir $x = 2$.

En substituant $x = 2$ dans la première équation, il suit $-2 \cdot 2 + y = 0$, d'où l'on tire $y = 4$.

Par conséquent, le centre du cercle est $\boxed{\mathrm{C}(2\,;4)}$.

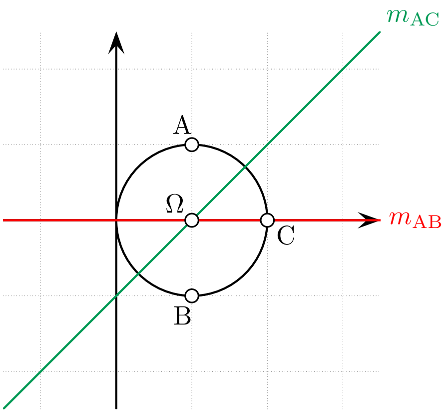
Calcul du rayon du cercle

Le rayon du cercle vaut $r = \delta(\mathrm{C}\,;\mathrm{A}) = \|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\| = \left\| \begin{pmatrix} 3-2 \\ 1-4 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \boxed{\sqrt{10}}$.

Équation du cercle

$(x-2)^2 + (y-4)^2 = (\sqrt{10})^2$ c'est-à-dire $\boxed{(x-2)^2 + (y-4)^2 = 10}$.

9)



Comme le centre du cercle Ω est équidistant des points A et B, il se situe sur la médiatrice m_{AB} des points A et B.

De même, puisque le centre du cercle Ω se situe à la même distance des points A et C, il appartient à la médiatrice m_{AC} des points A et C.

C'est donc à l'intersection des médiatrices m_{AB} et m_{AC} que se trouve le centre du cercle Ω.

Calcul de la médiatrice m_{AB}

Vu que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, la médiatrice de A et B est de la forme $(m_{\mathrm{AB}}) : y + c = 0$.

De plus, elle passe par le milieu de A et B : $\mathrm{M_{AB}}(\frac{1+1}{2}\,; \frac{1+(-1)}{2}) = \mathrm{M_{AB}}(1\,;0)$; on a ainsi $y + c = 0$, si bien que $c = 0$.

En résumé, l'équation de la médiatrice de A et B est $\boxed{(m_{\mathrm{AB}}) : y = 0}$.

Calcul de la médiatrice m_{AC}

Étant donné que $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, la médiatrice de A et C est de la forme $(m_{\mathrm{AC}}) : x - y + c = 0$.

En outre, elle passe par le milieu de A et C : $\mathrm{M_{AC}}(\frac{1+2}{2}\,;\frac{1+0}{2}) = \mathrm{M_{AC}}(\frac{3}{2}\,;\frac{1}{2})$; il en suit $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + c = 0$, d'où l'on tire $c = -1$.

L'équation de la médiatrice de A et C est ainsi $\boxed{(m_{\mathrm{AC}}) : x - y - 1 = 0}$.

Calcul du centre du cercle $\Omega = m_{\mathrm{AB}} \cap m_{\mathrm{AC}}$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

La première équation donne immédiatement $y = 0$. En remplaçant cette valeur dans la seconde équation, on obtient $x - 0 - 1 = 0$, à savoir $x = 1$.

Par conséquent, le centre du cercle est $\boxed{\Omega(1\,;0)}$.

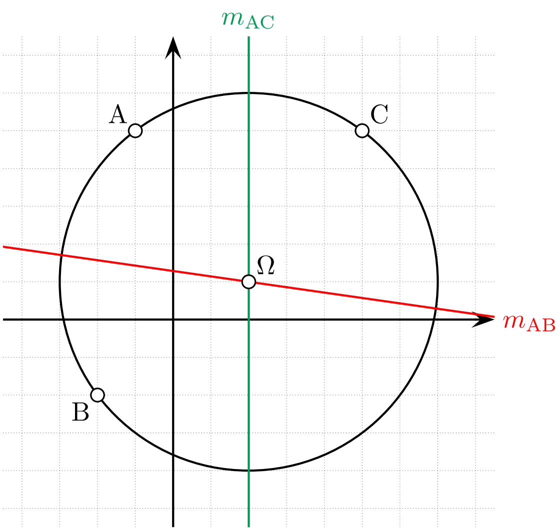
Équation du cercle

Puisque le centre du cercle est $\Omega(1\,;0)$, son équation est de la forme $(x-1)^2 + y^2 = r^2$.

Par ailleurs, le cercle passe par le point $\mathrm{A}(1\,;1)$: $(1-1)^2 + 1^2 = 1 = r^2$.

En conclusion, l'équation du cercle passant par les points A, B et C est $\boxed{(x-1)^2 + y^2 = 1}$.

10)



Calcul de la médiatrice m_{AB}

Puisque $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -2-(-1) \\ -2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$, la médiatrice m_{AB} est de la forme $(m_{\mathrm{AB}}) : x + 7\,y + c = 0$.

Sachant qu'elle passe par le point milieu $\mathrm{M_{AB}}(\frac{-1+(-2)}{2}\,;\frac{5+(-2)}{2}) = \mathrm{M_{AB}}(-\frac{3}{2}\,;\frac{3}{2})$, on a $-\frac{3}{2} + 7 \cdot \frac{3}{2} + c = 0$, ce qui donne $c = -9$.

Ainsi, l'équation de la médiatrice m_{AB} est $\boxed{(m_{\mathrm{AB}}) : x + 7\,y - 9 = 0}$.

Calcul de la médiatrice m_{AC}

Comme $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 5-(-1) \\ 5-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, la médiatrice m_{AC} est de la forme $(m_{\mathrm{AC}}) : x + c = 0$.

Or, elle passe par le point milieu $\mathrm{M}_{\mathrm{AC}}(\frac{-1+5}{2}\,;\frac{5+5}{2}) = \mathrm{M}_{\mathrm{AC}}(2\,;5)$, si bien que l'on a $2 + c = 0$, d'où l'on déduit $c = -2$.

En définitive, l'équation de la médiatrice m_{AC} est $\boxed{(m_{\mathrm{AC}}) : x - 2 = 0}$.

Calcul du centre du cercle $\Omega = m_{\mathrm{AB}} \cap m_{\mathrm{AC}}$

$$\begin{cases} x + 7\,y - 9 = 0 \\ x \qquad\quad - 2 = 0 \end{cases}$$

La seconde équation délivre instantanément $x = 2$. Par suite, la première équation fournit $2 + 7\,y - 9 = 0$, de sorte que $y = 1$. Le centre du cercle est par conséquent $\boxed{\Omega(2\,;1)}$.

Équation du cercle

Attendu que le centre du cercle est $\Omega(2\,;1)$, son équation est de la forme $(x-2)^2 + (y-1)^2 = r^2$.

Il doit par ailleurs passer par le point $\mathrm{A}(-1\,;5)$: $(-1-2)^2 + (5-1)^2 = 25 = r^2$.

On conclut que l'équation du cercle recherché est $\boxed{(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25}$.