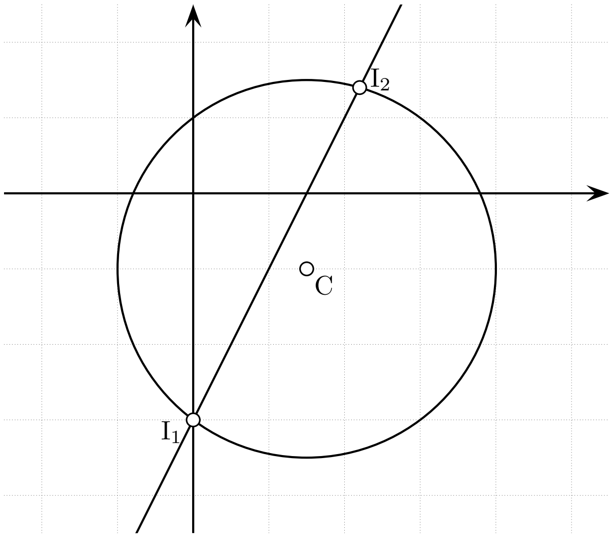
5.5 1)



Calcul du centre et du rayon du cercle

$x^2+y^2-3\,x+2\,y=3$

$\underbrace{x^2-3\,x+\frac{9}{4}}_{(x-\frac{3}{2})^2}-\frac{9}{4}+\underbrace{y^2+2\,y+1}_{(y+1)^2}-1=3$

$(x-\frac{3}{2})^2+(y+1)^2=3+\frac{9}{4}+1=\frac{25}{4}=(\frac{5}{2})^2$

$\boxed{\mathrm{C}(\frac{3}{2}\,;-1)}$ et $\boxed{r=\frac{5}{2}}$

Position relative de la droite et du cercle

$\delta(\mathrm{C}\,;d)=\dfrac{\left|2\cdot\frac{3}{2}-(-1)-3\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|1|}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\approx 0,45<\frac{5}{2}$

On conclut que la droite et le cercle se coupent en deux points I_1 et I_2.

Calcul des points d'intersection I_1 **et** I_2

$\begin{cases} y=2\,x-3 \\ x^2+y^2-3\,x+2\,y=3 \end{cases}$

L'équation de la droite donne $y=2\,x-3$ que l'on remplace dans l'équation du cercle :

$x^2+(2\,x-3)^2-3\,x+2\,(2\,x-3)=3$

$x^2+4\,x^2-12\,x+9-3\,x+4\,x-6-3=0$

$5\,x^2-11\,x=0$

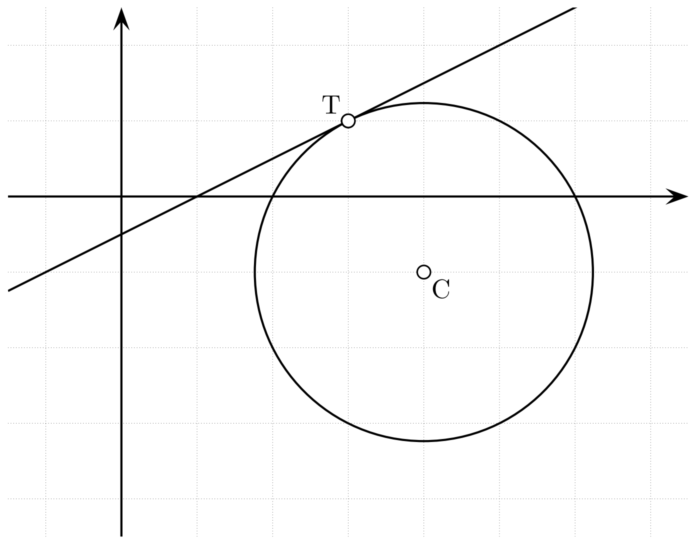
$x\,(5\,x-11)=0$

Il y a deux solutions :

(a) $x_1=0$: dans ce cas, $y_1=2\,x_1-3=2\cdot 0-3=-3$. Le premier point d'intersection est donc $\boxed{\mathrm{I}_1(0\,;-3)}$.

(b) $x_2=\frac{11}{5}$: on a alors $y_2=2\,x_2-3=2\cdot\frac{11}{5}-3=\frac{7}{5}$. Le second point d'intersection est ainsi $\boxed{\mathrm{I}_2(\frac{11}{5}\,;\frac{7}{5})}$.

2)



Calcul du centre et du rayon du cercle

$x^2 + y^2 - 8\,x + 2\,y + 12 = 0$

$\underbrace{x^2 - 8\,x + 16}_{(x-4)^2} - 16 + \underbrace{y^2 + 2\,y + 1}_{(y+1)^2} - 1 + 12 = 0$

$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 16 + 1 - 12 = 5 = (\sqrt{5})^2$

$\boxed{\mathrm{C}(4\,;-1)}$ et $\boxed{r = \sqrt{5}}$

Position relative de la droite et du cercle

$\delta(\mathrm{C}\,;d) = \dfrac{\big|\,4 - 2\cdot(-1) - 1\,\big|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \dfrac{5\,\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$

On en déduit que la droite et le cercle sont tangents.

Calcul du point de tangence T

$\begin{cases} x - 2\,y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8\,x + 2\,y + 12 = 0 \end{cases}$

L'équation de la droite implique $x = 2\,y + 1$ que l'on substitue dans l'équation du cercle :

$(2\,y+1)^2 + y^2 - 8\,(2\,y+1) + 2\,y + 12 = 0$

$4\,y^2 + 4\,y + 1 + y^2 - 16\,y - 8 + 2\,y + 12 = 0$

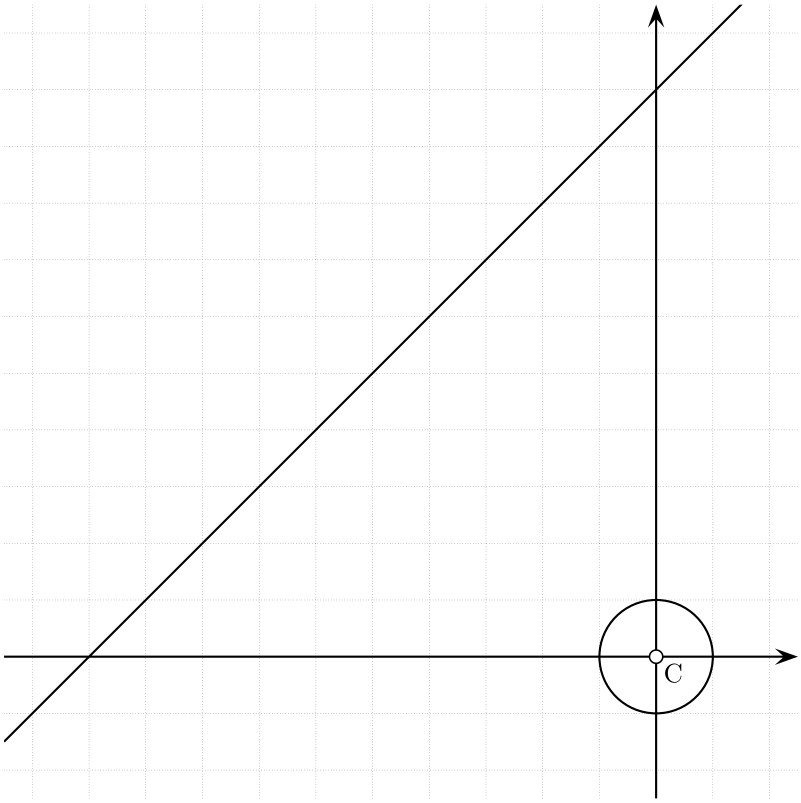
$5\,y^2 - 10\,y + 5 = 0$

$y^2 - 2\,y + 1 = 0$

$(y-1)^2 = 0$

On en tire d'une part $y = 1$ et d'autre part $x = 2\cdot 1 + 1 = 3$: le point de tangence est ainsi $\boxed{\mathrm{T}(3\,;1)}$.

3)



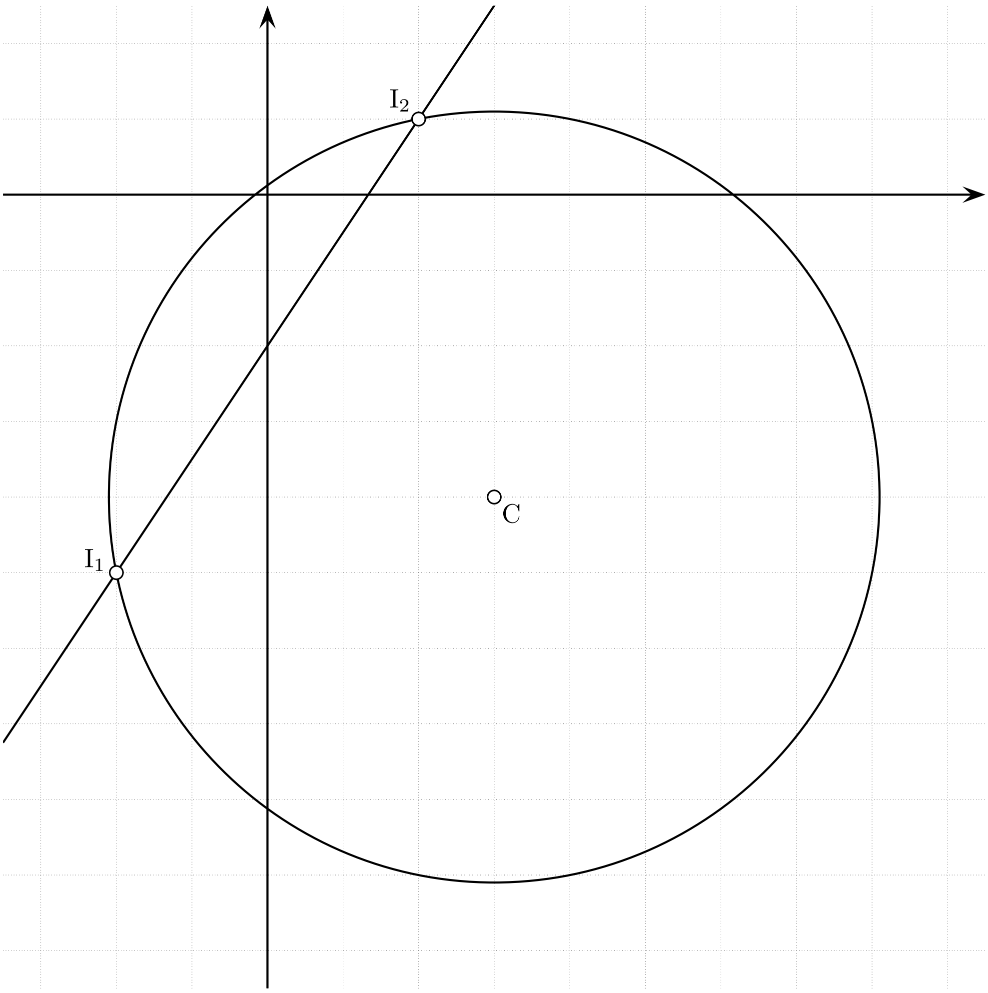
L'équation du cercle $x^2+y^2=1$ donne immédiatement son centre $\mathrm{C}(0\,;0)$ et son rayon $r=1$.

Position relative de la droite et du cercle

$\delta(\mathrm{C}\,;d)=\dfrac{\left|\,0-0+10\,\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{2}}=\dfrac{10\,\sqrt{2}}{2}=5\,\sqrt{2}>1$

Par conséquent, la droite et le cercle sont extérieurs.

4)



Calcul du centre et du rayon du cercle

$x^2+y^2-6\,x+8\,y-1=0$

$\underbrace{x^2-6\,x+9}_{(x-3)^2}-9+\underbrace{y^2+8\,y+16}_{(y+4)^2}-16-1=0$

$(x-3)^2+(y+4)^2=9+16+1=26=(\sqrt{26})^2$

$\boxed{\mathrm{C}(3\,;-4)}$ et $\boxed{r=\sqrt{26}}$

Position relative de la droite et du cercle

$\delta(\mathrm{C}\,;d)=\dfrac{\big|\,3\cdot 3-2\cdot(-4)-4\,\big|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\dfrac{13}{\sqrt{13}}=\dfrac{13\sqrt{13}}{13}=\sqrt{13}<\sqrt{26}$

Cela signifie que la droite et le cercle se coupent en deux points d'intersection I_1 et I_2.

Calcul des points d'intersection I_1 et I_2

$\begin{cases} 3\,x-2\,y=4 \\ x^2+y^2-6\,x+8\,y-1=0 \end{cases}$

L'équation de la droite implique $y=\frac{3\,x-4}{2}$ que l'on remplace dans l'équation du cercle :

$x^2 + (\frac{3\,x-4}{2})^2 - 6\,x + 8 \cdot \frac{3\,x-4}{2} - 1 = 0$
$x^2 + \frac{9\,x^2-24\,x+16}{4} - 6\,x + \frac{24\,x-32}{2} - 1 = 0$
$4\,x^2 + 9\,x^2 - 24\,x + 16 - 24\,x + 48\,x - 64 - 4 = 0$
$13\,x^2 - 52 = 0$
$x^2 - 4 = 0$
$(x+2)\,(x-2) = 0$
On obtient ainsi deux solutions :

(a) $x_1 = -2$ fournit $y_1 = \frac{3\,x_1-4}{2} = \frac{3\cdot(-2)-4}{2} = -5$; le premier point d'intersection est $\boxed{\mathrm{I}_1(-2\,;-5)}$.

(b) $x_2 = 2$ délivre $y_2 = \frac{3\,x_2-4}{2} = \frac{3\cdot 2-4}{2} = 1$; le second point d'intersection est $\boxed{\mathrm{I}_2(2\,;1)}$.