5.6 Calcul du centre et du rayon du cercle

$x^2 + y^2 - 10\,x + 16 = 0$

$\underbrace{x^2 - 10\,x + 25}_{(x-5)^2} - 25 + y^2 + 16 = 0$

$(x-5)^2 + y^2 = 25 - 16 = 9 = 3^2$

$\boxed{\mathrm{C}(5\,;0)}$ et $\boxed{r = 3}$

1) La droite est tangente au cercle si $\delta(\mathrm{C}\,;d) = r$:

$$\frac{\big|\, m \cdot 5 - 0 \,\big|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{|5\,m|}{\sqrt{m^2+1}} = 3$$

On obtient ainsi $5\,m = \pm 3\,\sqrt{m^2+1}$

En élevant au carré les termes de cette égalité, on a :

$25\,m^2 = 9\,(m^2+1)$

$16\,m^2 - 9 = 0$

$(4\,m+3)\,(4\,m-3) = 0$

On conclut que la droite et le cercle sont tangents si $\boxed{m = -\frac{3}{4}}$ ou $\boxed{m = \frac{3}{4}}$.

2) La droite et le cercle se coupent si $\delta(\mathrm{C}\,;d) < r$.

On doit donc avoir $\dfrac{|5\,m|}{\sqrt{m^2+1}} < 3$.

Puisque $\sqrt{m^2+1} > 0$, cette inéquation équivaut à $|5\,m| < 3\,\sqrt{m^2+1}$.

En élevant au carré les membres de cette inégalité, on arrive à :

$25\,m^2 < 9\,(m^2+1)$

$16\,m^2 - 9 < 0$

$(4\,m+3)\,(4\,m-3) < 0$

Étudions le signe du polynôme $\mathrm{P}(m) = (4\,m+3)\,(4\,m-3)$:

		$-\frac{3}{4}$		$\frac{3}{4}$	
$4\,m+3$	$-$		$+$		$+$
$4\,m-3$	$-$		$-$		$+$
$\mathrm{P}(m)$	$+$		$-$		$+$

L'inéquation $(4\,m+3)\,(4\,m-3) < 0$ a pour solution l'intervalle $\left]-\frac{3}{4}\,;\frac{3}{4}\right[$.

En résumé, la droite et le cercle se coupent si $\boxed{-\frac{3}{4} < m < \frac{3}{4}}$.