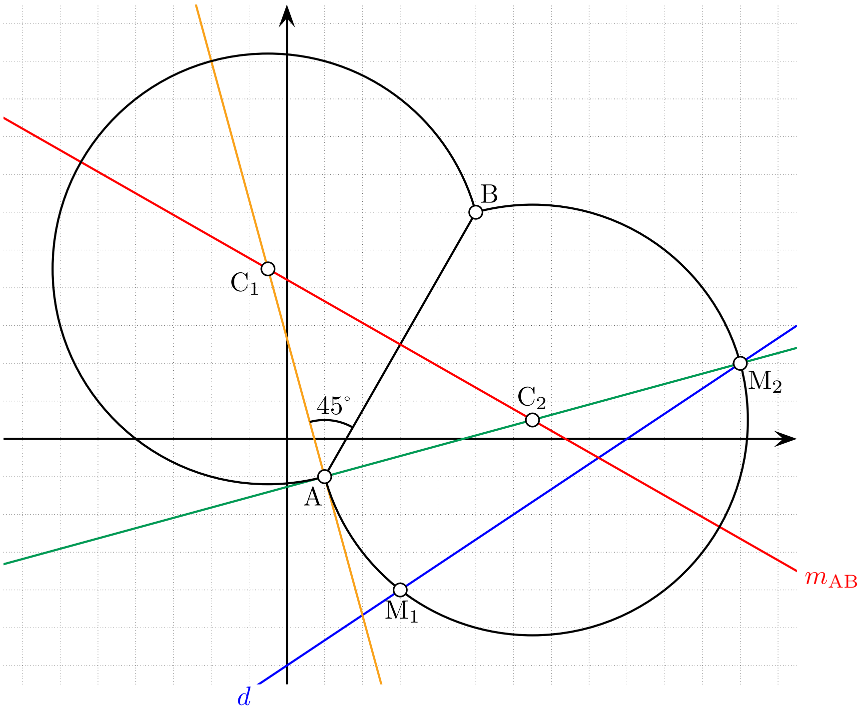
5.7



Le point M recherché se situe à la fois sur la droite $(d) : 2\,x - 3\,y = 18$ et sur un arc capable d'angle 45° relativement au segment AB.

Calcul de la médiatrice de A et B

Comme $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 6-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, la médiatrice de A et B est de la forme $(m_{AB}) : 4\,x + 7\,y + c = 0$.

De plus, elle doit passer par le milieu de A et B, à savoir $M_{AB}(\frac{1+5}{2}\,;\frac{-1+6}{2}) = M_{AB}(3\,;\frac{5}{2})$. On en tire $4 \cdot 3 + 7 \cdot \frac{5}{2} + c = 0$, ce qui donne $c = -\frac{59}{2}$.

En résumé, l'équation de la médiatrice de A et B est $4\,x + 7\,y - \frac{59}{2} = 0$ ou encore $\boxed{(m_{AB}) : 8\,x + 14\,y - 59 = 0}$.

Calcul des droites AC_1 et AC_2

Les droites AC_1 et AC_2 sont les droites qui forment un angle de ±45° avec la droite AB.

Comme $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, la pente de la droite AB vaut $\frac{7}{4}$.

On doit donc avoir $\tan(\pm 45^\circ) = \pm 1 = \dfrac{m - \frac{7}{4}}{1 + \frac{7}{4}\,m}$.

Il y ainsi deux possibilités :

1) $1 = \dfrac{m - \frac{7}{4}}{1 + \frac{7}{4}\,m}$ donne $m - \frac{7}{4} = 1 + \frac{7}{4}\,m$, d'où l'on déduit $m = -\frac{11}{3}$.

   La droite AC_1 est donc de la forme $y = -\frac{11}{3}\,x + h$.

On sait aussi qu'elle passe par le point $\mathrm{A}(1\,;-1)$: $-1 = -\frac{11}{3}\cdot 1 + h$ implique $h = \frac{8}{3}$.

L'équation de la droite $\mathrm{AC_1}$ est ainsi $y = -\frac{11}{3} + \frac{8}{3}$ ou plus simplement $\boxed{(\mathrm{AC_1}) : 11\,x + 3\,y - 8 = 0}$.

2) $-1 = \dfrac{m - \frac{7}{4}}{1 + \frac{7}{4}\,m}$ implique $-1 - \frac{7}{4}\,m = m - \frac{7}{4}$, d'où l'on tire $m = \frac{3}{11}$.

La droite $\mathrm{AC_2}$ est ainsi de la forme $y = \frac{3}{11}\,x + h$.

Comme on sait qu'elle passe par le point $\mathrm{A}(1\,;-1)$, on obtient $-1 = \frac{3}{11}\cdot 1 + h$, d'où suit $h = -\frac{14}{11}$.

En résumé, l'équation de la droite $\mathrm{AC_2}$ est $y = \frac{3}{11}\,x - \frac{14}{11}$ ou encore $\boxed{(\mathrm{AC_2}) : 3\,x - 11\,y - 14 = 0}$.

Calcul du point $\mathrm{C_1} = m_{\mathrm{AB}} \cap \mathrm{AC_1}$

$$\begin{cases} 8\,x + 14\,y - 59 = 0 \\ 11\,x + \ \ 3\,y - \ \ 8 = 0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \cdot(-3) \\ \cdot 14 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \cdot 11 \\ \cdot(-8) \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{r} -24\,x - 42\,y + 177 = 0 \\ 154\,x + 42\,y - 112 = 0 \\ \hline 130\,x \qquad\quad + \ \ 65 = 0 \end{array} \iff x = -\tfrac{1}{2} \qquad \begin{array}{r} 88\,x + 154\,y - 649 = 0 \\ -88\,x - \ \ 24\,y + \ \ 64 = 0 \\ \hline 130\,y - 585 = 0 \end{array} \iff y = \tfrac{9}{2}$$

On obtient ainsi $\boxed{\mathrm{C_1}(-\frac{1}{2}\,;\frac{9}{2})}$.

Calcul du point $\mathrm{C_2} = m_{\mathrm{AB}} \cap \mathrm{AC_2}$

$$\begin{cases} 8\,x + 14\,y - 59 = 0 \\ 3\,x - 11\,y - 14 = 0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \cdot 11 \\ \cdot 14 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \cdot 3 \\ \cdot(-8) \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{r} 88\,x + 154\,y - 649 = 0 \\ 42\,x - 154\,y - 196 = 0 \\ \hline 130\,x \qquad\quad - 845 = 0 \end{array} \iff x = \tfrac{13}{2} \qquad \begin{array}{r} 24\,x + \ \ 42\,y - 177 = 0 \\ -24\,x + \ \ 88\,y + 112 = 0 \\ \hline 130\,y - \ \ 65 = 0 \end{array} \iff y = \tfrac{1}{2}$$

On conclut à $\boxed{\mathrm{C_2}(\frac{13}{2}\,;\frac{1}{2})}$.

Position relative du 1er arc capable avec la droite d

Calculons tout d'abord le rayon de cet arc capable :

$$r = \delta(\mathrm{C_1}\,;\mathrm{A}) = \|\overrightarrow{\mathrm{C_1A}}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 - (-\frac{1}{2}) \\ -1 - \frac{9}{2} \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{11}{2} \end{pmatrix} \right\| = \left\| \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \end{pmatrix} \right\|$$
$$= |\tfrac{1}{2}|\,\sqrt{3^2 + (-11)^2} = \tfrac{1}{2}\,\sqrt{130} \approx 5,7$$

$$\delta(\mathrm{C_1}\,;d) = \frac{\left|2\cdot(-\frac{1}{2}) - 3\cdot\frac{9}{2} - 18\right|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|-\frac{65}{2}|}{\sqrt{13}} = \frac{\frac{65}{2}\,\sqrt{13}}{13} = \tfrac{5}{2}\,\sqrt{13} \approx 9,01 > r$$

On conclut que la droite d et le premier arc capable sont extérieurs.

Position relative du 2^{nd} arc capable avec la droite d

$$\delta(\mathrm{C}_2\,;d)=\frac{\left|2\cdot\frac{13}{2}-3\cdot\frac{1}{2}-18\right|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{\left|-\frac{13}{2}\right|}{\sqrt{13}}=\frac{\frac{13}{2}\sqrt{13}}{13}=\frac{1}{2}\sqrt{13}\approx 1,8<r$$

La droite d coupe donc le 2^{nd} arc capable en deux points M_1 et M_2.

Calcul des points M_1 et M_2

$$\begin{cases} 2\,x-3\,y=18 \\ (x-\frac{13}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=(\frac{1}{2}\sqrt{130})^2=\frac{130}{4} \end{cases}$$

La première équation implique $y=\frac{2\,x-18}{3}$ que l'on remplace dans la seconde équation :

$(x-\frac{13}{2})^2+(\frac{2\,x-18}{3}-\frac{1}{2})^2=\frac{130}{4}$

$(x-\frac{13}{2})^2+(\frac{4\,x-39}{6})^2=\frac{130}{4}$

$x^2-13\,x+\frac{169}{4}+\frac{16\,x^2-312\,x+1521}{36}=\frac{130}{4}$

$36\,x^2-468\,x+1521+16\,x^2-312\,x+1521=1170$

$52\,x^2-780\,x+1872=0$

$x^2-15\,x+36=0$

$(x-3)\,(x-12)=0$

On trouve ainsi :

1) $x_1=3$, d'où suit $y_1=\frac{2\,x_1-18}{3}=\frac{2\cdot 3-18}{3}=-4$; la première solution est donc $\boxed{\mathrm{M}_1(3\,;-4)}$.
2) $x_2=12$ délivre $y_2=\frac{2\,x_2-18}{3}=\frac{2\cdot 12-18}{3}=2$; la seconde solution est par conséquent $\boxed{\mathrm{M}_2(12\,;2)}$.